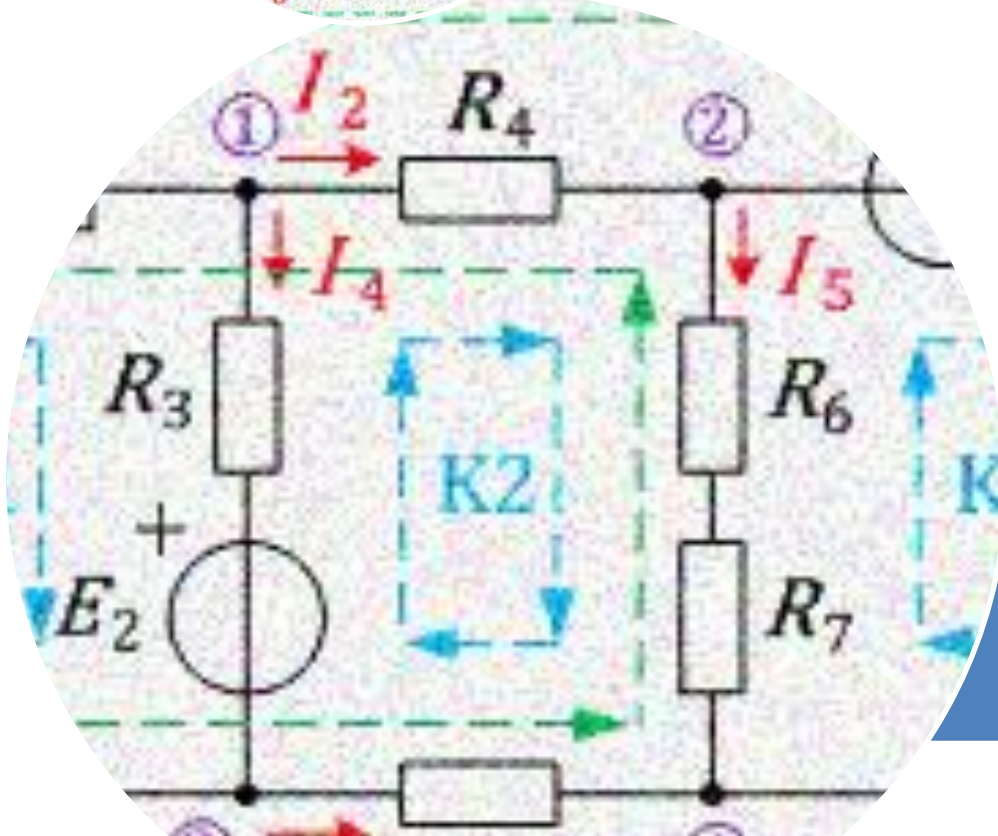
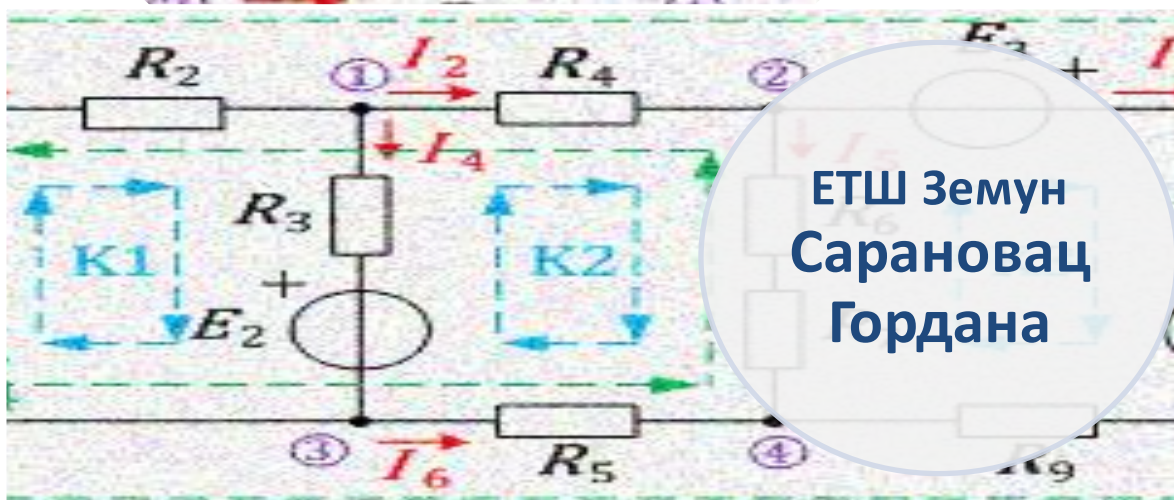


Основе
електротехнике



први
разред



ЕТШ Земун
Сарановац
Гордана

Садржај

1. Увод.....	5
1.1 Физичке величине.....	5
1.2 SI систем.....	5
1.3 Веће и мање јединице.....	5
1.4 Скаларне и векторске величине.....	5
1.5 Структура материје.....	5
1.6 Проводници, полупроводници и изолатори.....	6
2. Електростатика.....	7
2.1 Наелектрисање.....	7
2.2 Количина наелектрисања.....	7
2.3 Кулонов закон.....	7
2.4 Кулонов закон, интеракција више наелектрисања – принцип суперпозиције.....	8
2.5 Електрично поље.....	9
2.6 Јачина електричног поља у некој тачки.....	9
2.7 Суперпозиција вектора јачине електричног поља.....	10
2.8 Флукс електричног поља.....	11
2.9 Гаусов закон.....	12
2.10 Примери примене Гаусовог закона за одређивање јачине електричног поља.....	12
Пример 1: равномерно површински наелектрисана сфера.....	13
Пример 2: равномерно површински наелектрисана равна.....	13
Пример 3. Поље у кондензатору.....	13
2.11 Рад сила у хомогеном електричном пољу.....	15
2.12 Потенцијална енергија система тачкастих наелектрисања.....	15
2.13 Рад у радијалном пољу.....	15
2.14 Потенцијал електричног поља у некој тачки.....	16
2.15 Потенцијал електричног поља тачкастог наелектрисања у некој тачки.....	17
2.16 Суперпозиција потенцијала.....	17
2.17 Рад и потенцијал.....	17
2.18 Напон.....	17
2.19 Еквипотенцијалне површине.....	17
2.20 Јачина и потенцијал хомогеног електричног поља.....	18
2.21 Електростатички дипол.....	19
2.22 Диелектрици.....	19
2.23 Јачина електричног поља у диелектрику.....	19
2.24 Електрично поље у проводнику.....	20
2.25 Потенцијал проводника.....	20

2.26 Проводник у електричном пољу	20
2.27 Капацитивност усамљеног проводника	20
2.28 Кондензатори.....	20
2.29 Везивање кондензатора и еквивалентна капацитивност.....	21
1. Редна веза кондензатора.....	21
2. Паралелна веза кондензатора.....	22
3. Мешовита веза кондензатора.....	23
2.30 Капацитивни разделник.....	23
2.31 Енергија кондензатора.....	23
2.32 Пробој диелектрика	23
3. Једносмерне струје.....	25
3.1 Појам једносмерне струје.....	25
3.2 Пратећа дејства електричне струје.....	25
3.3 Појам електричног кола и елементи кола.....	25
3.4 Подела извора.....	25
3.5 Јачина, смер и густина струје	26
3.6 Први Кирхофов закон	27
3.7 Електрична отпорност	27
3.8 Зависност ρ и R од температуре.....	28
3.9 Специфична проводност и проводност.....	28
3.10 Омов закон.....	29
3.11 Џулов закон	30
3.12 Снага електричне струје.....	30
3.13 Везивање отпорника и еквивалентна отпорност.....	30
1. Редна веза отпорника.....	30
2. Паралелна веза отпорника.....	31
3. Мешовита веза отпорника.....	32
3.14 Напонски разделник	32
3.15 Струјни разделник	32
3.16 Мерење јачине струје	34
3.17 Мерење напона.....	34
3.18 Мерење снаге.....	35
3.19 Електрични генератори, електромоторна сила, унутрашња отпорност генератора	35
3.20 Просто коло	36
3.21 Напон на прикључцима генератора, режими рада	36
режим празног хода	36

Режим кратког споја	37
Прилагођење по снази – услов за добијање максималне корисне снаге	37
3.22 Просто коло са више генератора и пријемника	38
3.23 Напон између две тачке U_{AB}	39
3.24 Везивање напонских генератора	42
редна веза.....	42
паралелна веза	42
3.25 Струјни генератори и везивање струјних генератора	43
Паралелна веза струјних генератора.....	43
редна веза.....	43
3.26 Решавање сложених кола методом еквивалентирања генератора	44
3.27 Решавање сложених кола методом Кирхофових закона.....	44
4. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКА	49
4.1 Магнетно поље	49
4.2 Магнетно поље струјних проводника.....	49
4.3 Магнетна индукција.....	49
4.4 Јачина магнетног поља.....	51
4.5 Амперов закон.....	53
4.6 Магнетно поље у присуству супстанце	53
4.7 Магнетна својства материјала	54
4.8 Магнетисање феромагнетних материјала.....	55
4.9 Флукс вектора магнетне индукције.....	56
4.10 Магнетна кола. Кап-Хопкинсонов закон.....	56
4.11 Проводник са струјом у страном магнетном пољу – електромагнетна сила.....	57
4.12 Узајамно деловање проводника са струјом – електродинамичка сила.....	57
4.13 Електромагнетна индукција.....	58
4.14 Индукована електромоторна сила у праволинијском проводнику	59
4.15 Индуктивност кола	59
4.16 Међусобна индуктивност	60
4.17 Самоиндукција	62
4.18 Међусобна (узајамна) индукција	62
4.19 Енергија магнетног поља	63
4.20 Трансформатори.....	63
4.21 Вртложне (вихорне)струје или Фукоове струје.....	63

1. Увод

1.1 Физичке величине

Физичке величине описују особине тела, стања и процеса. Бројна вредност им се утврђује мерењем. Могу бити основне и изведене.

1.2 SI систем

Основних физичких величина има 7 (табела 1.1) и оне чине SI систем. Све остале су изведене.

Назив физичке величине	Ознака физичке величине	Мерна јединица	Ознака мерне јединице
Дужина	l	метар	m
Маса	m	килограм	kg
Време	t	секунд	s
Температура	T	келвин	K
Јачина струје	I	ампер	A
Јачина светлости	J	кандела	cd
Количина супстанце	n_m	мол	mol

Табела 1.1

1.3 Веће и мање јединице

Ознаке префикса и вредности су приказани у табели 1.2.

Префикс	Ознака	Вредност	Префикс	Ознака	Вредност
дека	da	10^1	деци	d	10^{-1}
хекто	h	10^2	центи	c	10^{-2}
кило	k	10^3	мили	m	10^{-3}
мега	M	10^6	микро	μ	10^{-6}
гига	G	10^9	нано	n	10^{-9}
тера	T	10^{12}	пико	p	10^{-12}
пета	P	10^{15}	фемто	f	10^{-15}
			ато	a	10^{-18}

Табела 1.2

1.4 Скаларне и векторске величине

Скаларне величине су потпуно одређене својом бројном вредношћу. Векторске величине су одређене бројном вредношћу (интензитетом), правцем и смером.

1.5 Структура материје

Маса електрона: $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Маса протона и неутрона: $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Наелектрисање електрона: $Q_e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Наелектрисање протона: $Q_p = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Атом је неутралан. Број протона је једнак броју електрона:

$$n_e = n_p. \quad (1.1)$$

1.6 Проводници, полупроводници и изолатори

Према способности да проводе електрицитет материјали се деле на:

1. Изолатори—електрони из последње љуске су чврсто везани за свој атом, а ако се у близини нађе неко наелектрисано тело атом ће се деформисати. Изолатори су: порцелан, лискун, гума, ваздух, пластика...
2. Проводници—електрони из спољашње љуске су лабаво везани за свој атом, крећу се од атома до атома, а под утицајем електричног поља почињу да се крећу усмерено. Проводници су: бакар, алуминијум, сребро... У течностима постоје позитивни и негативни јони који могу да се крећу, а у гасовима јони.
3. Полупроводници—код њих је број слободних наелектрисиња већи него код изолатора а мањи него код проводника. Полупроводници су силицијум и германијум.

Рачунски примери: практикум 1.1 и 1.2

2. Електростатика

2.1 Наелектрисање

Електростатика проучава узајамно деловање непокретних наелектрисаних тела. Тело које има више електрона него протона наелектрисано је негативно. Оно које има мање електрона него протона наелектрисано је позитивно.

Тела се могу наелектрисати:

1. трењем (шипка и тканина)
2. додиром
3. индукцијом

У било ком процесу наелектрисавања крећу се електрони, тако што или прелазе са једног тела на друго, или се премештају унутар једног тела. Укупан број електрона у систему се не мења, и важи закон одржања наелектрисања,

$$Q_{\text{укупно}} = \text{const.} \quad (2.1)$$

2.2 Количина наелектрисања

Количина наелектрисања је мера наелектрисаности тела. Обележава се са Q . Јединица је кулон $[C]$. Најмања количина наелектрисања која постоји у природи (елементарно наелектрисање) је електрон, па се свако наелектрисање може приказати као целобројни умножак наелектрисања електрона:

$$Q = N \cdot e. \quad (2.2)$$

Наелектрисање електрона:

$$e = Q_e = -1,6 \cdot 10^{-19} C \quad (2.3)$$

Бројни пример

1. Наелектрисање тела износи $Q = -1032 \text{ nC}$. Одредити број елементарних честица на телу.

$$Q = N \cdot e \Rightarrow N = \frac{Q}{e} = \frac{-1032 \cdot 10^{-9} C}{-1,6 \cdot 10^{-19} C} = 645 \cdot 10^{10}$$

Задаци за самосталан рад: практикум 2.1

2.3 Кулонов закон

Тела наелектрисана различитим наелектрисањима се привлаче, а истим одбијају. Тачкасто наелектрисање је тело чије су димензије занемарљиве у односу на растојање тог тела од других наелектрисаних тела са којима реагује.

Интензитет силе између два тачкаста наелектрисања сразмеран је количинама оба наелектрисања а обрнуто сразмеран квадрату растојања између њих. Силе делују дуж правца који спаја наелектрисања и привлачне су ако су наелектрисања различитог знака а одбојне ако су истог (слика 2.1).

Интензитет:

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r_{12}^2} \quad (2.4)$$

Јединица за силу је њутн $[N]$.

ϵ_0 је диелектрична пропустљивост вакуума и износи $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$.

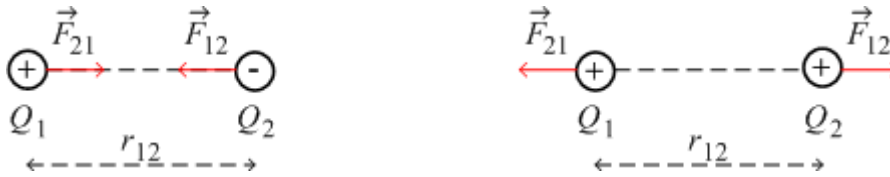
ϵ_r је релативна диелектрична пропустљивост средине, неименован је број, а за ваздух износи $\epsilon_r = 1$.

Вредност израза $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k_0 = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$

Израз за Кулонов закон се тако своди на:

$$F_{12} = \frac{k_0}{\epsilon_r} \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r_{12}^2} \quad (2.5)$$

Правац и смер, слика 2.1:



Слика 2.1 Уз Кулонову силу

Напомена: сила је векторска величина и слика на којој су приказани правац и смер вектора је обавезна.

Бројни пример

1. Две мале куглице се налазе у средини чије је $\epsilon_r = 3$ на растојању од 4 dm . Прва куглица има вишак од $5 \cdot 10^{10}$ електрона, а наелектрисање друге је $Q_2 = 6 \text{ nC}$. Одредити интензитет силе којом друга куглица делује на прву.

$$Q_1 = N_1 \cdot e = -8 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$F_{21} = \frac{k_0}{\epsilon_r} \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r_{12}^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}}{3} \cdot \frac{8 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot 6 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(4 \cdot 10^{-1} \text{ m})^2} = 9 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

2. Интензитет силе између два електрона која се налазе у ваздуху износи 16 pN . Одредити растојање између њих.

$$F_{12} = \frac{k_0}{\epsilon_r} \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r_{12}^2} \Rightarrow r_{12}^2 = \frac{k_0}{\epsilon_r} \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{F_{12}}$$

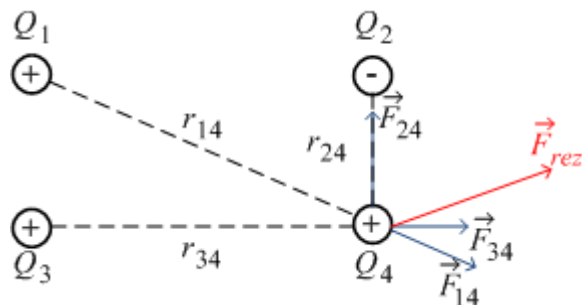
$$r_{12}^2 = 1,44 \cdot 10^{-17} \text{ m}^2 = 14,4 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2 \text{ (експонент мора бити паран због кореновања)}$$

$$r_{12} = \sqrt{14,4 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2} = 3,79 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

2.4 Кулонов закон, интеракција више наелектрисања - принцип суперпозиције

У систему са више тачкастих наелектрисања електричне силе делују између свака два наелектрисања. Укупна сила која делује на једно од наелектрисања једнака је векторском збиру свих сила којима сва друга наелектрисања делују на дато, слика 2.2. Вектор резултантне силе на наелектрисање Q_4 је

$$\vec{F}_{rez} = \vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{34}$$



Слика 2.2 Суперпозиција сила

Задаци за самосталан рад: практикум 2.2

2.5 Електрично поље

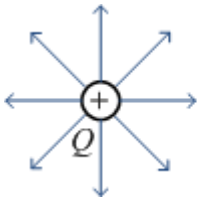
Око сваког наелектрисаног тела постоји електрично поље. Оно делује електричним силама на свако наелектрисано тело које се у њему налази. Графички се може представити линијама електричног поља. Линије поља излазе из позитивног наелектрисуања а улазе у негативно наелектрисуање.

За детектовање поља користи се позитивно пробно наелектрисуање, Q_p .

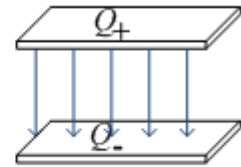
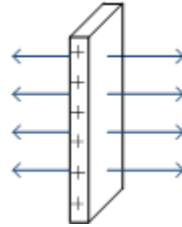
Поља могу бити радијална и хомогена.

Радијално поље—у свакој тачки има различиту јачину, правац и смер, слика 2.3. Овакво поље постоји око тачкастог наелектрисуања, површински наелектрисуане сфере...

Хомогено поље—у свакој тачки има исту јачину, правац и смер, слика 2.4. Овакво је поље постоји у околини површински наелектрисуане равни, у кондензатору...



Слика 2.3 Радијално поље



Слика 2.4 Хомогено поље

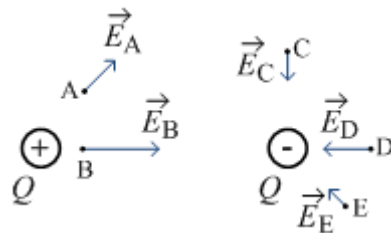
2.6 Јачина електричног поља у некој тачки

Јачина поља је бројно једнака сили којом то поље делује на јединично пробно позитивно наелектрисуање унето у ту тачку. То је векторска величина, дакле има бројну вредност (интензитет), правац и смер.

Интензитет: $E = \frac{F}{Q_p}$ (2.6)

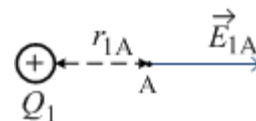
Ово је дефинициони образац и важи за обе врсте поља, дакле и за радијална и за хомогена поља. Јединица за јачину поља је $\left[\frac{N}{C}\right]$ или $\left[\frac{V}{m}\right]$.

Правац и смер: исти као што би имала сила која би деловала на позитивно пробно наелектрисуање унето у дату тачку (или из позитивног излази у негативно улази). На слици 2.5 су приказани вектори јачине електричног поља позитивног (у тачкама А и В) и негативног (у тачкама С, D и Е) тачкастог наелектрисуања.



Слика 2.5 Јачина електричног поља

За тачкасто наелектрисуање се може извести још један израз. Ако се у тачку А (слика 2.6) постави позитивно пробно наелектрисуање Q_p , на њега делује Кулонова сила F_{1p} . Замењујући Кулонову силу у дефинициони образац следи:



Слика 2.6 Јачина електричног поља тачкастог наелектрисуања

$$E_{1A} = \frac{F_{1p}}{Q_p} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{|Q_1| \cdot Q_p}{r_{1A}^2}}{Q_p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{|Q_1|}{r_{1A}^2} \quad (2.7)$$

Напомена: јачина електричног поља је векторска величина и слика на којој су приказани правац и смер вектора је обавезна.

Бројни пример

- Одредити јачину електростатичког поља ако оно делује на тачкасто наелектрисање од 6 nC силом од 30 mN .

$$E = \frac{F}{Q_p} = \frac{30 \cdot 10^{-3} \text{ N}}{6 \cdot 10^{-9} \text{ C}} = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

- Између две хоризонталне металне плоче (горња плоча је наелектрисана позитивно) успостављено је хомогено електрично поље јачине $5 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$. Између плоча се налази куглица која има вишак од 10 електрона. Одредити силу која делује на куглицу, ако се њена маса може занемарити.

$$Q = N \cdot e = -16 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$F = Q_p \cdot E = |Q| \cdot E = 16 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 5 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 80 \cdot 10^{-16} \text{ N}, \text{ сила има смер на горе}$$

- Одредити јачину електричног поља у тачки А која се налази на растојању од 2 cm од електрона. Релативна диелектрична пропустљивост средине је $\epsilon_r = 5$. Колика би била вредност јачине поља у ваздуху?

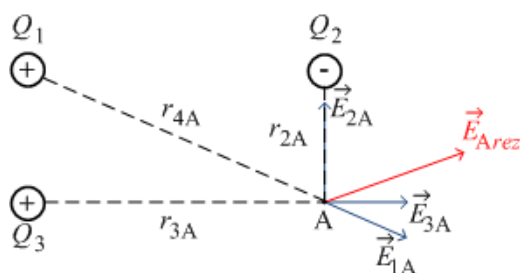
$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{|e|}{r_A^2} = \frac{k}{\epsilon_r} \cdot \frac{|e|}{r_A^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}}{5} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 3,6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E_{A0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|e|}{r_A^2} = \epsilon_r \cdot E_A = 18 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

2.7 Суперпозиција вектора јачине електричног поља

Јачина електричног поља система тачкастих наелектрисања у некој тачки (тачка А, слика 2.7), једнака је векторском збиру јачина електричних поља које ствара свако појединачно наелектрисање.

$$\vec{E}_{rez A} = \vec{E}_{1A} + \vec{E}_{2A} + \vec{E}_{3A}$$



Слика 2.7 Суперпозиција вектора јачине поља

Рачунски примери-праћикум 2.3

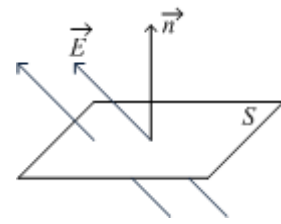
2.8 Флукс електричног поља*

Флукс хомогеног електричног поља јачине \vec{E} кроз равну површину \vec{S} (слика 2.8) једнак је:

$$\Psi = \vec{E} \cdot \vec{S} = E \cdot S \cdot \cos(\vec{E}, \vec{n}). \quad (2.8)$$

Флукс је скаларна величина. Јединица за флукс је $\left[\frac{N}{C} m^2 = \frac{V}{m} m^2\right]$ односно $[Vm]$.

Смер нормале се код отворене површине бира произвољно. Код затворених површина увек се поставља спољашња нормала, то јест вектор увек излази из површине.



Слика 2.8 Флукс вектора електричног поља

Бројни пример

- У хомогеном електричном пољу јачине $5 \frac{kV}{m}$ налази се равна кружна површина $S = 10 \text{ cm}^2$. Флукс кроз површину износи 2 Vm . Одредити угао између нормале на површину и вектора јачине електричног поља.

$$\Psi = E \cdot S \cdot \cos(\vec{E}, \vec{n}) \Rightarrow \cos(\vec{E}, \vec{n}) = \cos \alpha = \frac{\Psi}{E \cdot S} = \frac{2 \text{ Vm}}{5 \cdot 10^3 \frac{V}{m} \cdot 10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,4$$

$$\alpha = \arccos 0,4 = 66,42^\circ$$

2.9 Гаусов закон*

Флукс електричног поља кроз произвољну затворену површину једнак је количнику наелектрисања које се налази унутар те затворене површине и константе ϵ , ($\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$).

$$\Psi = \vec{E} \cdot \vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \quad (2.9)$$

Напомена: флукс је скаларна величина и потребно је узимати у обзир предзнак наелектрисања.

Бројни пример

- У лопти се налазе три наелектрисања, $Q_1 = 15 \text{ pC}$, $Q_2 = -12 \text{ pC}$ и $Q_3 = -20 \text{ pC}$. Диелектрична пропустљивост средине износи $\epsilon_r = 4$. Одредити флукс кроз лопту.

$$\Psi = \frac{Q_{\text{укупно}}}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = \frac{-17 \cdot 10^{-12} \text{ C}}{8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \cdot 4} = -0,48 \text{ Vm}$$

- Купа се налази у хомогеном електричном пољу јачине $E = 15 \frac{V}{m}$ постављена тако да је њена основа паралелна са линијама поља. Одредити флукс кроз купу.

$$\Psi = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = \frac{0}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = 0$$

2.10 Примери примене Гаусовог закона за одређивање јачине електричног поља*

Расподела наелектрисања може бити:

- Линијска, Q' :

$$Q' = \frac{Q}{l}, \left[\frac{C}{m} \right] \quad (2.10)$$

- Површинска, σ :

$$\sigma = \frac{Q}{S}, \left[\frac{C}{m^2} \right] \quad (2.11)$$

- Запреминска, ρ :

$$\rho = \frac{Q}{V}, \left[\frac{C}{m^3} \right] \quad (2.12)$$

Бројни пример

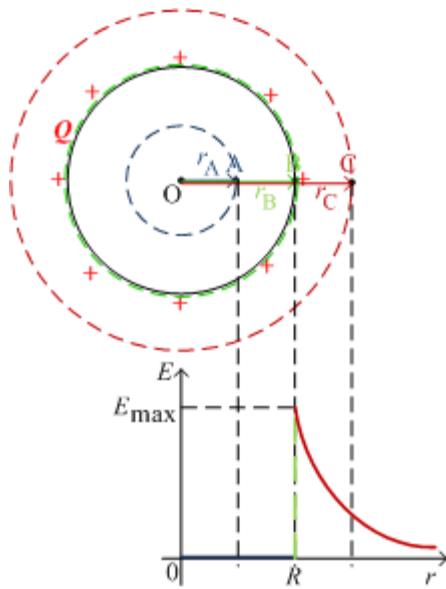
- Одредити густине наелектрисања у случајевима када се наелектрисање од $Q = 9 \text{ nC}$ распореди по:
 - кружници полупречника $r = 3 \text{ cm}$
 - кругу полупречника $r = 3 \text{ cm}$
 - лопти полупречника $R = 3 \text{ cm}$

$$a) Q' = \frac{Q}{l} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r} = 0,48 \cdot 10^{-7} \frac{C}{m}$$

$$b) \sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{r^2 \pi} = 0,32 \cdot 10^{-5} \frac{C}{m^2}$$

$$c) \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3} R^3 \pi} = 0,08 \cdot 10^{-3} \frac{C}{m^3}$$

Пример 1: равномерно површински наелектрисана сфера



Слика 2.9 Уз пример 1

Сфера полупречника R равномерно је површински наелектрисана количином наелектрисања Q , слика 2.9.

Површинска густина наелектрисања сфере је $\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}$.

а) За све тачке унутар сфере (на пример тачка А), $0 < r < R$, важи:

$$\Psi = \vec{E} \cdot \vec{S} \Rightarrow ES = \frac{|Q|}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}, Q = 0, \Rightarrow E = 0.$$

б) За све тачке на површини сфере (на пример тачка В), $r = R$, важи:

$$\Psi = \vec{E} \cdot \vec{S} \Rightarrow ES = \frac{|Q|}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}, \Rightarrow E = \frac{|Q|}{S \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}, \Rightarrow$$

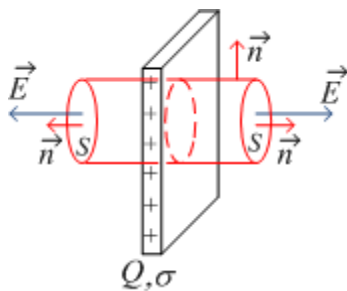
$$E = E_{\max} = \frac{|Q|}{4\pi R^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

в) За све тачке удаљене од површине сфере (на пример тачка С), $r > R$, важи:

$$\Psi = \vec{E} \cdot \vec{S} \Rightarrow ES = \frac{|Q|}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}, \Rightarrow E = \frac{|Q|}{S \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}, \Rightarrow$$

$$E = \frac{|Q|}{4\pi r^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \frac{R^2}{R^2} = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \cdot \frac{R^2}{r^2}$$

Пример 2: равномерно површински наелектрисана раван



Слика 2.10 Уз пример 2

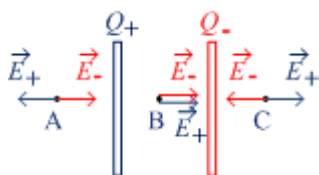
Раван површине S је наелектрисана количином наелектрисања Q , слика 2.10.

За све тачке ван равни важи:

$$\Psi = \vec{E} \cdot \vec{S} \Rightarrow, 2ES = \frac{|Q|}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} = \frac{|\sigma|S}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}, \Rightarrow$$

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}$$

Пример 3. Поље у кондензатору



Слика 2.11 Уз пример 3

Две једнаке паралелне равни површине S су наелектрисане једнаким количинама наелектрисања Q_+ и Q_- , слика 2.11. Површинске густине наелектрисања су σ_+ и σ_- . Јачине поља су: $E_+ = E_- = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} = \frac{|\sigma_-|}{2\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}$.

Ван кондензатора (тачке А и С) резултантна јачина поља је једнака 0. У кондензатору (тачка В) резултантна јачина поља је

$$E_B = 2E_+ = 2E_- = \frac{\sigma_+}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} = \frac{|\sigma_-|}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}$$

Бројни примери

1. Усамљена проводна лопта, полупречника $R = 20 \text{ cm}$ се налази у средини чије је $\epsilon_r = 3$. Одредити јачину поља у тачки А која се налази у унутрашњости лопте, тачки В на површини лопте и тачки С која је удаљена 10 cm од површине лопте.

$$E_A = 0$$

$$E_B = E_{\max} = \frac{|Q|}{4\pi R^2 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = 3 \cdot 10^4 \frac{N}{C}$$

$$r_C = 30 \text{ cm}, E_C = \frac{|Q|}{4\pi r_C^2 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = 1,33 \cdot 10^4 \frac{N}{C}$$

2. Површинска густина наелектрисања равни је $\sigma = 177 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}$. Одредити флукс кроз квадратну површину странице 10 cm , ако је она постављена паралелно са равни.

$$E = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = 1 \cdot 10^6 \frac{V}{m}$$

$$S = a^2 = 100 \cdot 10^{-4} m^2$$

$$\Psi = E \cdot S \cdot \cos(\vec{E}, \vec{n}) = 1 \cdot 10^4 \text{ Vm}$$

3. Две паралелне металне плоче се налазе у ваздуху на растојању од 1 cm . Плоче су наелектрисане наелектрисањима исте површинске густине $\sigma = 17,7 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}$, супротног знака. Одредити јачину електричног поља. Утврдити да ли је дошло до пробоја (вредност електричног поља у било којој тачки простора не сме да буде већа од критичног поља, које за ваздух износи $E_{kr} = 3 \cdot 10^6 \frac{N}{C}$).

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 2 \cdot 10^6 \frac{N}{C} < E_{kr}$$

Рачунски примери-практикум 2.4.

2.11 Рад сила у хомогеном електричном пољу*

Рад је скаларна величина. Јединица за рад је џул $[Nm] = [J]$.

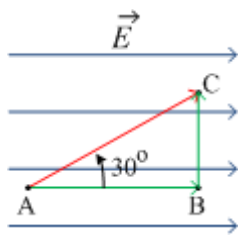
$$A = \vec{F} \cdot \vec{l} = Fl \cos(\vec{F}, \vec{l}) \quad (2.13)$$

Заменом једначине 2.6 у једначину 2.13, добија се следећи израз:

$$A = Q\vec{E} \cdot \vec{l} = QEl \cos(\vec{E}, \vec{l}) \quad (2.14)$$

1. Рад зависи само од почетног и крајњег положаја тела, а не од путање дуж које се вршио рад.
2. Рад по затвореној путањи једнак је 0.
3. Ако је рад већи од нуле онда је поље вршило рад. Ако је рад мањи од нуле онда је рад вршила страна сила

Пример: Упоредити извршени рад приликом померања позитивног наелектрисања Q из тачке А у тачку С, слика 2.12, ако се рад врши а) дуж путање \overline{AC} и б) дуж путање \overline{ABC} .



а)

$$A_{AC} = Q\vec{E} \cdot \vec{l}_{AC} = QEl_{AC} \cos(\vec{E}, \vec{l}_{AC}) = QEl_{AC} \cos 30^\circ$$

$$A_{AC} = QEl_{AB}$$

б)

$$A_{AC} = A_{AB} + A_{BC} = QEl_{AB} \cos(\vec{E}, \vec{l}_{AB}) + QEl_{BC} \cos(\vec{E}, \vec{l}_{BC})$$

$$A_{AC} = QEl_{AB} \cos 0^\circ + QEl_{BC} \cos 90^\circ$$

$$A_{AC} = QEl_{AB}$$

Слика 2.12 Уз пример

Напомена: рад је скаларна величина и потребно је узимати у обзир предзнак наелектрисања.

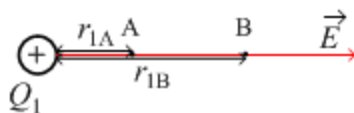
2.12 Потенцијална енергија система тачкастих наелектрисања

Сваки систем у коме делују конзервативне силе има потенцијалну енергију. Потенцијална енергија система тачкастих наелектрисања Q_1 и Q_2 је:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q_1Q_2}{r_{12}} [J] \quad (2.15)$$

Напомена: енергија је скаларна величина и потребно је узимати у обзир предзнак наелектрисања.

2.13 Рад у радијалном пољу



Слика 2.13 Пример

Пример: Посматра се тачкасто наелектрисање Q_1 . Оно око себе прави електрично поље јачине E . Ово поље је радијално и у различитим тачкама има различите вредности. Посматрају се тачке А (на растојању од тачкастог наелектрисања r_{1A}) и тачка В (на растојању од тачкастог наелектрисања r_{1B}).

Ако се у тачку А постави позитивно наелектрисање Q_2 , онда је енергија система према једначини 2.15: $W_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q_1Q_2}{r_{1A}}$

Ако се у тачку В постави позитивно наелектрисање Q_2 енергија система је:

$$W_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q_1Q_2}{r_{1B}}$$

Наелектрисање Q_2 је било прво постављено у тачку А а затим је померено у В. Рад који се изврши једнак је разлици енергија:

$$A_{AB} = W_A - W_B, \Rightarrow A_{AB} > 0, \Rightarrow \text{рад врши поље}$$

Ако је наелектрисање било прво постављено у В а затим померено у А, извршени рад је:

$$A_{BA} = W_B - W_A, \Rightarrow A_{BA} < 0, \Rightarrow \text{рад врши страна сила}$$

У радијалном пољу рад се рачуна искључиво преко закона о одржању енергије:

$$A_{AB} = W_A - W_B \quad (2.16)$$

Бројни примери:

1. Између облога плочастог кондензатора постоји поље јачине $E = 1,5 \cdot 10^6 \frac{N}{C}$.

Растојање између плоча је $d = 2 \text{ mm}$. Израчунати рад који се изврши при померању наелектрисања $Q = 5 \text{ mC}$ од једне до друге плоче, у смеру вектора јачине поља у кондензатору.

$$A = QEl \cos(\vec{E}, \vec{l}) = 5 \cdot 10^{-3} \text{ C} \cdot 1,5 \cdot 10^6 \frac{N}{C} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \cos 0^\circ = 15 \text{ J} \quad (\text{рад је већи од нуле, према томе рад је вршило поље})$$

2. Тачке А и В се налазе на растојању $r_A = 2 \text{ cm}$ и $r_B = 6 \text{ cm}$ од тачкастог наелектрисања $Q = 18 \text{ nC}$ у средини чике је $\epsilon_r = 27$. Израчунати енергију коју поседује електрон ако се постави у тачку А а затим у тачку В.

$$W_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q \cdot e}{r_A} = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}}{27} \cdot \frac{18 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot (-1,6) \cdot 10^{-19} \text{ C}}{2 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = -4,8 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

$$W_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q \cdot e}{r_B} = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}}{27} \cdot \frac{18 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot (-1,6) \cdot 10^{-19} \text{ C}}{6 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = -1,6 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

3. Израчунати рад који се изврши када се електрон из задатка 2 премешта из тачке А у В. А затим из В назад у А. Ко је вршио рад у овим случајевима?

$$A_{AB} = W_A - W_B = -3,2 \cdot 10^{-17} \text{ J}, \text{ рад је вршила страна сила}$$

$$A_{BA} = W_B - W_A = +3,2 \cdot 10^{-17} \text{ J}, \text{ рад је вршило поље}$$

Рачунски примери-праћукум 5.

2.14 Потенцијал електричног поља у некој тачки

Потенцијал електричног поља у некој тачки А је бројно једнак електричној потенцијалној енергији (W_A) коју поседује јединична количина наелектрисања (Q) унета у ту тачку.

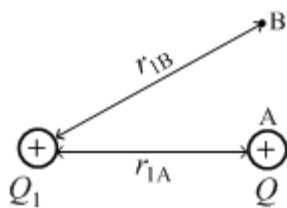
$$V_A = \frac{W_A}{Q} \quad (2.17)$$

Ово је дефинициони образац и важи са све врсте поља. Јединица за потенцијал је волт $[V] = \left[\frac{J}{C} \right]$.

Напомена: потенцијал је скаларна величина и потребно је узимати у обзир предзнак наелектрисања.

Напомена: у литератури се за потенцијал паралелно користи и ознака ϕ .

2.15 Потенцијал електричног поља тачкастог наелектрисања у некој тачки



Слика 2.14 Потенцијал у радијалном пољу

Потенцијал тачке А је:

$$V_A = \frac{W_A}{Q} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q_1 Q}{r_{1A}}}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q_1}{r_{1A}} \quad (2.18)$$

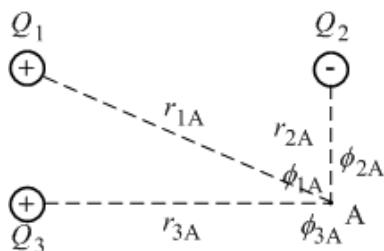
Израз 2.18 важи само за радијална поља, и ако је референтна тачка у бесконачности (потенцијал тачке у бесконачности је једнак нули).

Уколико је референтна тачка В, тада је потенцијал у тачки А:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{Q_1}{r_{1A}} - \frac{Q_1}{r_{1B}} \right) \quad (2.19)$$

Напомена: потенцијал је скаларна величина и потребно је узимати у обзир предзнак наелектрисања.

2.16 Суперпозиција потенцијала



Слика 2.15 Суперпозиција потенцијала

Потенцијал система тачкастих наелектрисања у некој тачки једнак је алгебарском збиру потенцијала које праве појединачна тачкаста наелектрисања.

Према слици 2.15, укупни потенцијал у тачки А је:

$$V_A = V_{1A} + V_{2A} + V_{3A}$$

2.17 Рад и потенцијал

Рад при премештању наелектрисања Q из једне тачке у другу тачку поља једнак је производу тог наелектрисања и разлике потенцијала поља између почетне и крајње тачке.

$$A_{AB} = W_A - W_B = QV_A - QV_B = Q(V_A - V_B) \quad (2.20)$$

2.18 Напон

Напон између тачке А и тачке В једнак је разлици потенцијала у тачки А (V_A) и тачки В (V_B). Напон је скаларна величина, и јединица је волт. Обележава се са U .

$$U_{AB} = V_A - V_B \quad (2.21)$$

Обратити пажњу да напон између тачака А и В (U_{AB}) није исто што и напон између тачака В и А (U_{BA}).

$$U_{AB} = V_A - V_B, U_{BA} = V_B - V_A, \Rightarrow U_{AB} = -U_{BA}$$

2.19 Еквипотенцијалне површине*

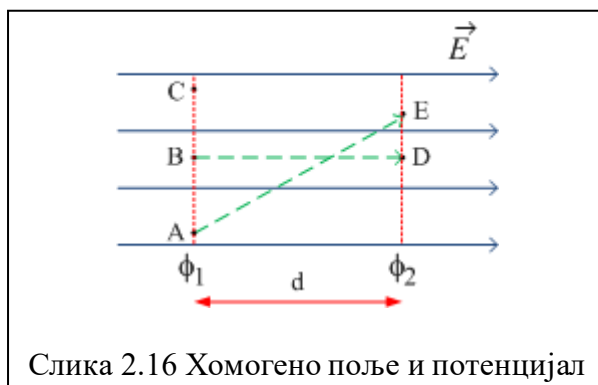
Еквипотенцијална површина је површина на којој у свакој тачки потенцијал има исту вредност.

Рад при премештању наелектрисања по еквипотенцијалној површини једнак је нули. На пример тачке А и В се налазе на еквипотенцијалној површини и потенцијали у обе тачке су једнаки:

$$A_{AB} = W_A - W_B = QV_A - QV_B = Q(V_A - V_B) = 0$$

Код тачкастог наелектрисања и површински наелектрисане сфере еквипотенцијалне површине су концентричне сфере. Код површински наелектрисане равни еквипотенцијалне површине су равни паралелне са датом наелектрисаном равни.

2.20 Јачина и потенцијал хомогеног електричног поља



Слика 2.16 Хомогено поље и потенцијал

Према слици 2.16 тачке А, В и С се налазе на еквипотенцијалној површини потенцијала V_1 . Тачке D и E су на површини потенцијала V_2 . При премештању наелектрисања Q из било које тачке (А, В, С) на површини потенцијала V_1 у било коју тачку (D, E) потенцијала V_2 , изврши се исти рад, према изразу 2.20:

$$A_{12} = Q(V_1 - V_2) = QU_{12}$$

Према изразу 2.14, извршени рад је $A_{12} = QEd$. Из ова два израза следи:

$$U_{12} = Ed$$

Напомена: обратити пажњу на смер кретања наелектрисања и смер електричног поља.

Бројни примери:

1. У тачки А неког поља електрон има енергију $W_A = 2,4 \cdot 10^{-17} \text{ J}$. Одредити потенцијал тачке А.

$$V_A = \frac{W_A}{Q} = \frac{2,4 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{-1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = -1,5 \cdot 10^2 \text{ V}$$

2. Тачке А и В се налазе на растојању $r_A = 2 \text{ cm}$ и $r_B = 6 \text{ cm}$ од тачкастог наелектрисања $Q = 18 \text{ nC}$ у средини чике је $\epsilon_r = 27$. Израчунати потенцијале тачака А и В и напон U_{AB} између њих. Одредити рад који се изврши при премештању електрона из тачке А у тачку В. Упоредити резултате са резултатима трећег задатка из претходне групе бројних примера.

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{r_A} = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}}{27} \cdot \frac{18 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{2 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 3 \cdot 10^2 \text{ V}$$

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{r_B} = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}}{27} \cdot \frac{18 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{6 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 1 \cdot 10^2 \text{ V}$$

$$U_{AB} = V_A - V_B = 2 \cdot 10^2 \text{ V}$$

$$A_{AB} = e \cdot U_{AB} = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 2 \cdot 10^2 \text{ V} = -3,2 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

3. Између облога плочастиг кондензатора постоји поље јачине $E = 1,5 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$.

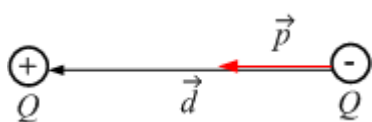
Растојање између плоча је $d = 2 \text{ mm}$. Одредити напон између плоча кондензатора и рад који се изврши при померању наелектрисања $Q = 5 \text{ mC}$ од једне до друге плоче, у смеру вектора јачине поља у кондензатору. Упоредити резултате са резултатима првог задатка из претходне групе бројних примера.

$$U = E \cdot d = 3 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$A = Q \cdot U = 15 \text{ J}$$

Рачунски примери-праћукум 2.5.

2.21 Електростатички дипол*



Слика 2.17 Дипол

Електростатички дипол чине два супротна тачкаста наелектрисања, Q и $-Q$ на малом међусобном растојању d , слика 2.17.

Електрични момент дипола \vec{p} је производ количине наелектрисања Q и вектора растојања \vec{d} . Вектор растојања је оријентисан од минуса ка плусу па је тако

оријентисан и момент дипола.

Када се дипол нађе у хомогеном електричном пољу, на његова наелектрисања делују супротне електричне силе које образују спрег. Момент спрега тежи да окрене дипол тако да се вектор \vec{p} поклопи по правцу и смеру са вектором јачине поља \vec{E} .

2.22 Диелектрици

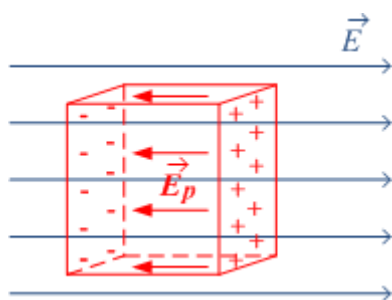
Изолатор (диелектрик) је материјал који нема слободних наелектрисања. Атоми (молекули) су неутрални, број протона је увек једнак броју електрона. Али атоми (молекули) диелектрика својим присуством утичу на електрично поље у коме се диелектрик налази.

Подела диелектрика:

1. диелектрици са неполарним молекулима – поклапају се центри позитивног и негативног наелектрисања молекула
2. диелектрици са поларним молекулима – молекул је дипол, померени су центри позитивног и негативног наелектрисања молекула

Ван електричног поља обе врсте диелектрика се понашају исто. Код прве врсте не постоје диполни моменти, а код друге укупни диполни момент једнак је 0.

У електричном пољу:



Слика 2.18 Уз диелектрике

1. диелектрици са неполарним молекулима се поларизују (одвоје позитивни и негативни центри) индукционим ефектом

2. диелектрици са поларним молекулима се поларизују оријентационим ефектом

У оба случаја наелектрисања постоје само на површини диелектрика, са једне стране позитивна а са друге стране негативна. У унутрашњости нема наелектрисања. Ова наелектрисања се зову поларизациона наелектрисања.

Када се диелектрик изнесе из електричног поља све се враћа у почетно стање.

2.23 Јачина електричног поља у диелектрику

Према слици 2.18, укупна јачина електричног поља у диелектрику је једнака векторском збиру јачина страног поља \vec{E} и поља поларизационих (везаних, површинских) наелектрисања \vec{E}_p , $\vec{E}_{rez} = \vec{E} + \vec{E}_p$. Ови вектори су колинеарни, и супротног смера па је интензитет резултантног поља $E_{rez} = E - E_p$. При познатој вредности ϵ_r овај израз се своди на:

$$E_{rez} = \frac{E}{\epsilon_r} \quad (2.22)$$

2.24 Електрично поље у проводнику

1. Наелектрисање је распоређено по спољашњој површини проводника
2. Јачина поља у проводнику је 0
3. Јачина поља на површини проводника има правац нормале на површину
4. Јачина поља унутар шупљине у проводнику је 0

2.25 Потенцијал проводника

1. У свим тачкама проводника потенцијал је исти
2. У свакој тачки шупљине потенцијал је исти као у било којој тачки проводника
3. Када се споје два проводника различитих потенцијала наелектрисања теку док им се потенцијали не изјадначе

2.26 Проводник у електричном пољу

Када се ненаелектрисани проводник унесе у поље наелектрисања у проводнику ће се кретати до успостављања равнотеже. Раздвајање наелектрисања престаје када се изједначе интензитети спољашњег и индукованог поља. На једној површини проводника индукује се позитивно, на другој негативно наелектрисање, а резултантно поље у проводнику једнако је нули.

2.27 Капацитивност усамљеног проводника

Капацитивност проводника је бројно једнака количини наелектрисања које је потребно предати проводнику да би му се потенцијал повећао за 1 волт.

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.23)$$

Капацитивност зависи од облика и величине проводника. Јединица за капацитивност је фарад $[F] = \left[\frac{C}{V}\right]$. Фарад је велика јединица, и у пракси се користе микро, пико и нано фаради.

Пример: капацитивност сферног проводника полупречника R

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R}Q} = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r R$$

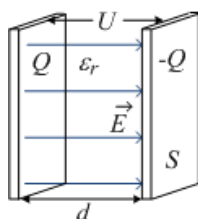
У присуству другог проводника капацитивност се мења, и то је искоришћено за прављење кондензатора који имају већу капацитивност од усамљених проводника.

2.28 Кондензатори

Капацитивност кондензатора бројно је једнака количини наелектрисања које је потребно предати кондензатору да би му се напон између облога повећао за 1 волт.

$$C = \frac{Q}{U} \quad (2.24)$$

Пример: капацитивност равног плочастог кондензатора



Слика 2.19 Равни кондензатор

Раван кондензатор чине 2 једнаке металне плоче на малом растојању, слика 2.19.

Јачина електричног поља у кондензатору је:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = \frac{Q}{S\epsilon_0\epsilon_r}$$

Напон у хомогеном електричном пољу је:

$$U = Ed = \frac{Q}{S\epsilon_0\epsilon_r} d$$

Капацитивност кондензатора је:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0\epsilon_r S}{d} \quad (2.25)$$

Бројни примери:

- Количина наелектрисања кондензатора износи $Q = 5 \text{ mC}$, а напон $U = 250 \text{ V}$.
Одредити капацитивност кондензатора.

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \text{ C}}{250 \text{ V}} = 0,02 \text{ mF}$$

- Познати су подаци равног плочастог кондензатора: $S = 72 \text{ cm}^2$, $d = 2 \text{ mm}$, $\epsilon_r = 3,14$. Одредити капацитивност кондензатора.

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot 3,14 \cdot 72 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 100 \text{ pF}$$

- Раван кондензатор капацитивности C је прикључен на напон U . Кондензатор се скине са извора и повећа му се растојање између електрода два пута. Одредити како се променила капацитивност, количина наелектрисања, напон, јачина поља и енергија кондензатора*. (Напомена: када се кондензатор скине са напајања, количина наелектрисања на њему остаје иста. Док је кондензатор прикључен на извор, напон је константан.)

Почетно стање:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}, Q = CU, E = \frac{U}{d}, W = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{Q^2}{2 \cdot C}$$

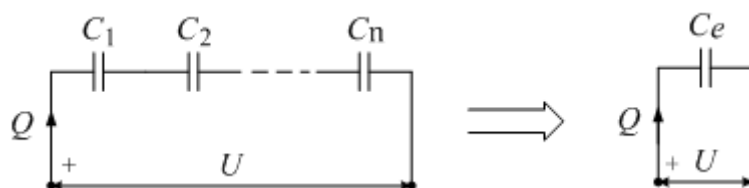
Крајње стање: $d' = 2 \cdot d$

$$C' = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d'} = \frac{C}{2}, Q' = Q, U' = \frac{Q'}{C'} = 2U, E' = \frac{U'}{d'} = E, W' = \frac{Q'^2}{2C'} = 2W$$

Рачунски примери-праћикум 2.6.

2.29 Везивање кондензатора и еквивалентна капацитивност

1. Редна веза кондензатора



Слика 2.20 Уз редну везу кондензатора

Вредност еквивалентног кондензатора C_e се одређује према изразу:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (2.26)$$

За редну везу два кондензатора важи:

$$C_{12} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \quad (2.27)$$

За редну везу три кондензатора важи:

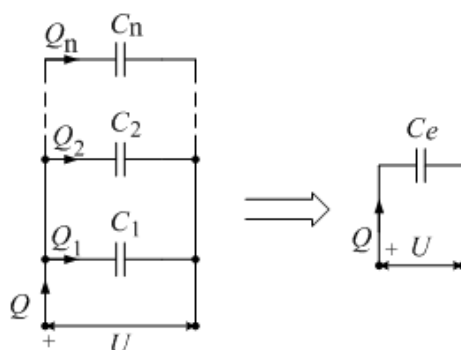
$$C_{123} = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot C_3}{C_1 \cdot C_2 + C_2 \cdot C_3 + C_3 \cdot C_1} \quad (2.28)$$

Ако су вредности кондензатора $C_1 \neq C_2 \neq C_3 \dots$:

- Напони на кондензаторима су $U_1 \neq U_2 \neq U_3 \dots$
- Количине наелектрисања на кондензаторима су $Q_1 = Q_2 = Q_3 \dots = Q_e$
- Укупни напон је $U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots$
- Вредност еквивалентног кондензатора C_e је мања од најмање вредности свих кондензатора у вези

5. За n једнаких редно везаних кондензатора важи $C_e = \frac{C_1}{n}$

2. Паралелна веза кондензатора



Слика 2.21 Уз паралелну везу кондензатора

Вредност еквивалентног кондензатора C_e се одређује према изразу:

$$C_e = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (2.29)$$

Ако су вредности кондензатора $C_1 \neq C_2 \neq C_3 \dots$:

1. Напони на кондензаторима су $U_1 = U_2 = U_3 \dots = U$
2. Количине наелектрисања на кондензаторима су $Q_1 \neq Q_2 \neq Q_3 \dots = Q_e$
3. Укупна количина наелектрисања је $Q_e = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots$
4. Вредност еквивалентног кондензатора C_e је већа од највеће вредности свих кондензатора у вези
5. За n једнаких паралелно везаних кондензатора важи $C_e = nC_1$

Бројни примери:

1. Кондензатори $C_1 = 2 \text{ pF}$, $C_2 = 5 \text{ pF}$ и $C_3 = 3 \text{ pF}$ су везани редно.

а) Одредити C_e

$$C_{123} = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot C_3}{C_1 \cdot C_2 + C_2 \cdot C_3 + C_3 \cdot C_1} = \frac{30 \text{ pF}}{31} = 0,97 \text{ pF}$$

б) Ако напон на кондензатору C_2 износи $U_2 = 6 \text{ V}$, одредити укупни напон U

$$Q_2 = C_2 \cdot U_2 = 30 \text{ pC} = Q_1 = Q_3 = Q_e, U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 15 \text{ V}, U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = 10 \text{ V},$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = 31 \text{ V}, \text{ проверка: } U = \frac{Q_e}{C_e} = 31 \text{ V}$$

ц) Ако је укупни напон $U = 100 \text{ V}$, одредити напоне на сваком кондензатору

$$Q_e = C_e \cdot U = 97 \text{ pC} = Q_1 = Q_2 = Q_3, U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 48,5 \text{ V}, U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = 19,4 \text{ V},$$

$$U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = 32,3 \text{ V}, \text{ проверка: } U = U_1 + U_2 + U_3 = 100,2 \text{ V} \approx 100 \text{ V}$$

2. Кондензатори $C_1 = 2 \text{ pF}$, $C_2 = 5 \text{ pF}$ и $C_3 = 3 \text{ pF}$ су везани паралелно.

а) Одредити C_e

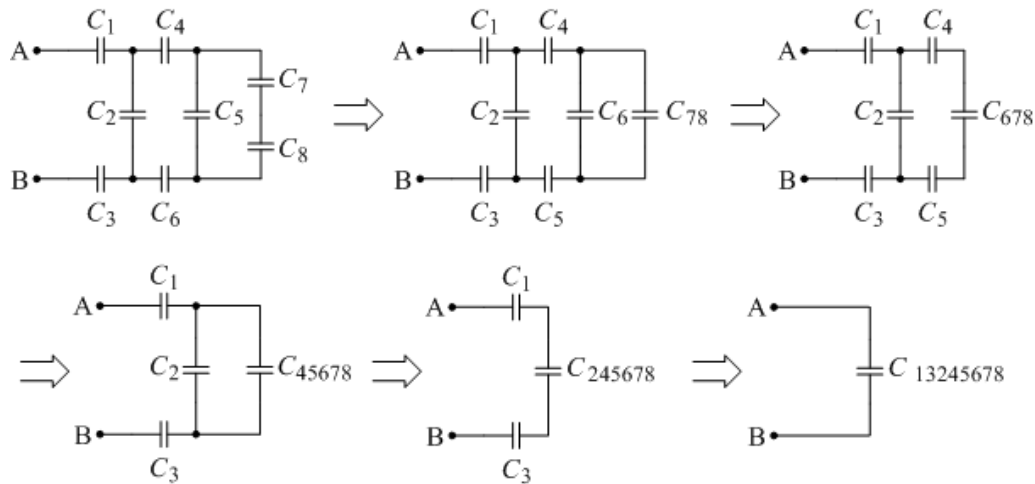
$$C_e = C_1 + C_2 + C_3 = 10 \text{ pF}$$

б) Ако количина наелектрисања на кондензатору C_3 износи $Q_3 = 60 \text{ pC}$, одредити укупну количину наелектрисања на свим кондензаторима

$$U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = 20 \text{ V} = U_1 = U_2 = U, Q_1 = C_1 \cdot U_1 = 40 \text{ pC}, Q_2 = C_2 \cdot U_2 = 100 \text{ pC},$$

$$Q_e = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 200 \text{ pC}, \text{ проверка: } Q_e = C_e \cdot U = 200 \text{ pC}$$

3. Мешовита веза кондензатора



Слика 2.22 Уз мешовиту везу кондензатора

Бројни пример, слика 2.22

1. Подаци: $C_1 = 18 \text{ pF}$, $C_2 = 15 \text{ pF}$, $C_3 = 18 \text{ pF}$, $C_4 = 12 \text{ pF}$, $C_5 = 6 \text{ pF}$, $C_6 = 8 \text{ pF}$, $C_7 = 5 \text{ pF}$, $C_8 = 20 \text{ pF}$.

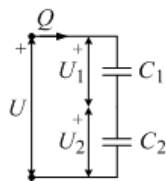
Поступак:

$$C_{78} = \frac{C_7 \cdot C_8}{C_7 + C_8} = 4 \text{ pF}, C_{678} = C_6 + C_{78} = 12 \text{ pF}, C_{45678} = \frac{C_4 \cdot C_5 \cdot C_{678}}{C_4 C_5 + C_5 C_{678} + C_{678} C_4} = 3 \text{ pF},$$

$$C_{245678} = C_2 + C_{45678} = 18 \text{ pF}, C_{AB} = \frac{C_1 \cdot C_3 \cdot C_{245678}}{C_1 C_3 + C_3 C_{245678} + C_{245678} C_1} = 6 \text{ pF}$$

Рачунски примери-праћукум 2.7.

2.30 Капацитивни разделник



Слика 2.23 Капацитивни разделник

Једначине капацитивног разделника напона су:

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U,$$

$$U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U.$$

2.31 Енергија кондензатора

Енергија кондензатора је:

$$W = \frac{Q \cdot U}{2} = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} \tag{2.30}$$

Јединица је џул [J].

2.32 Пробој диелектрика

Под дејством спољашњег поља јавља се поларизација. Ако је поље сувише јако одвојиће се електрони од атома и јавиће се струја. Диелектрична чврстоћа је минималан интензитет електричног поља E_{kr} у диелектрику при коме долази до пробоја. За ваздух је $E_{kr} = 30 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$.

Бројни примери:

1. Кондензатор $C = 20 \text{ pF}$ је наелектрисан до напона $U = 300 \text{ V}$. Колика се количина топлоте развије при пробијању кондензатора, ако се 80% енергије кондензатора претвори у топлоту варнице?

$$W = \frac{C \cdot U^2}{2} = 90 \cdot 10^{-8} \text{ J}, Q = 0,8 \cdot W = 72 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

2. Кондензатори C_1 и C_2 су везани редно и прикључени на напон $U = 200 \text{ V}$. Капацитивност првог кондензатора је $C_1 = 0,5 \mu\text{F}$. Други кондензатор је променљив, и његова капацитивност може да се мења од $C_{2min} = 0,05 \mu\text{F}$ до $C_{2max} = 0,5 \mu\text{F}$. Одредити у ком интервалу може да се мења напон на променљивом кондензатору C_2 .

Напон на C_2 при минималној вредности $C_{2min} = 0,05 \mu\text{F}$ је U'_2 :

$$U'_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_{2min}} U = 0,91 \cdot 200 \text{ V} = 182 \text{ V}$$

Напон на C_2 при максималној вредности $C_{2max} = 0,5 \mu\text{F}$ је U''_2 :

$$U''_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_{2max}} U = 0,5 \cdot 200 \text{ V} = 100 \text{ V}$$

3. Кондензатори $C_1 = 1 \mu\text{F}$ и $C_2 = 2 \mu\text{F}$ су везани паралелно. Затим је на њих везан редно кондензатор $C_3 = 3 \mu\text{F}$. Ова група је прикључена на напон $U = 100 \text{ V}$. Одредити како ће се променити наелектрисање кондензатора C_3 ако дође до пробоја кондензатора C_2 .

Почетно стање, пре пробоја:

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 3 \mu\text{F}, C_{123} = \frac{C_1}{2} = 1,5 \mu\text{F},$$

$$Q_{123\text{roc}} = C_{123} \cdot U = 150 \mu\text{C} = Q_{12\text{roc}} = Q_{3\text{roc}}$$

Крајње стање, после пробоја:

$$C_e = C_3, Q_{3kr} = C_3 \cdot U = 300 \mu\text{C},$$

$$\Delta Q_3 = Q_{3kr} - Q_{3\text{roc}} = 150 \mu\text{C}$$

4. Кондензатори C_1 и C_2 , при чему је $C_1 = 2C_2$, везани су редно. Максимални дозвољени напон на који се кондензатори могу појединачно прикључити да не дође до пробоја износи $U_{1max} = U_{2max} = 100 \text{ V}$. На коју максималну вредност напона се може прикључити ова редна веза?

Једначине капацитивног разделника:

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U = \frac{C_2}{2C_2 + C_2} U = \frac{U}{3} \leq 100 \text{ V}, \Rightarrow U \leq 300 \text{ V}$$

$$U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U = \frac{2C_2}{2C_2 + C_2} U = \frac{2U}{3} \leq 100 \text{ V}, \Rightarrow U \leq 150 \text{ V}$$

Максимална вредност напона редне везе је према томе $U_{max} = 150 \text{ V}$.

Према једначинама капацитивног разделника, за ову вредност напона, на кондензаторима ће бити напони:

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U = \frac{C_2}{2C_2 + C_2} 150 \text{ V} = 50 \text{ V}$$

$$U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U = \frac{2C_2}{2C_2 + C_2} 150 \text{ V} = 100 \text{ V}$$

3. Једносмерне струје

3.1 Појам једносмерне струје

Електрична струја је усмерено кретање наелектрисаних честица. Слободне наелектрисане честице које се могу кретати усмерено се зову носиоци електричне струје. У металима носиоци електричне струје су електрони, у електролитима позитивни и негативни јони, а у јонизованим гасовима електрони и јони.

Подела према врсти носилаца наелектрисуња:

1. електронске (кондукционе) струје, метали и вакуум, нема промене средине
2. јонске струје, хемијске промене средине

Подела према временској променљивости:

1. непроменљива (једносмерна стална струја)
2. променљива (и смер може да се мења)

Ако у проводнику постоји електрично поље, кроз њега тече електрична струја.

3.2 Пратећа дејства електричне струје

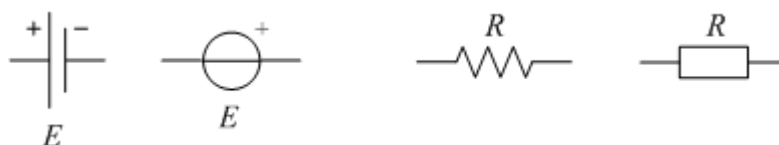
1. Загревање проводника – електрична енергија се претвара у топлотну
2. Магнетно поље – око сваког проводника са струјом постоји магнетно поље
3. Хемијске реакције – електролиза код електролита
4. Светлосно дејство – сијалица
5. Механичко дејство

3.3 Појам електричног кола и елементи кола

Елементи кола су:

1. извор (унутрашњи део кола)
2. пријемник (спољашњи део кола)
3. проводници (спољашњи део кола)

Да би кроз проводник текла струја коло мора бити затворено и на његовим крајевима мора бити разлике потенцијала.



Слика 3.1 Ознаке извора и термогених пријемника

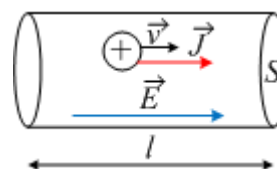
3.4 Подела извора

1. Електрохемијски – хемијска енергија се претвара у електричну. Ови извори имају две електроде: позитивну и негативну и електролит (водени раствор киселина, база или соли).
2. Механички – код електричних машине
3. Термоелектрични – топлотна енергија се претвара у електричну. Ако се загрева место споја два разнотодна метала долази до усмереног кретања електрона, а на крајевима термоспоја се јавља разлика потенцијала.
4. Фотоелектрични – енергија светлосног зрачења се претвара у електричну помоћу фотоелемената.

3.5 Јачина, смер и густина струје

Смер:

- Физички – то је стварни смер кретања носилаца наелектрисања. У проводнику се крећу електрони и овај смер је супротан смеру вектора поља.
- Технички – усвојен исти као смер E , од вишег ка нижем потенцијалу, слика 3.2



Слика 3.2 Уз смер струје

Јачина струје I

Јачина струје кроз попречни пресек проводника бројно је једнака количини наелектрисања која прође кроз ту површину у јединици времена.

$$I = \frac{Q}{t} \quad (3.1)$$

Јединица за јачину струје је ампер $[A] = \left[\frac{C}{s}\right]$

Густина струје J

Интензитет густине струје је бројно једнак јачини струје кроз јединичну површину нормалну на правац кретања наелектрисања. Смер густине струје је исти као смер позитивних носилаца струје.

$$J = \frac{I}{S} \quad (3.2)$$

Јединица за густину струје је $\left[\frac{A}{m^2}\right]$

Бројни примери:

1. Кроз проводник попречног пресека 8 cm^2 протиче струја густине $30 \frac{\text{kA}}{\text{m}^2}$.

Одредити колико је електрона протекло кроз проводник за време од 5 минута.

$$I = J \cdot S = 30 \cdot 10^3 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \cdot 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 24 \text{ A}$$

$$Q = I \cdot t = 24 \text{ A} \cdot 300 \text{ s} = 7200 \text{ C}$$

$$N = \frac{Q}{|e|} = \frac{7200 \text{ C}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 4500 \cdot 10^{19} = 4,5 \cdot 10^{22}$$

2. Кроз проводник кружног попречног пресека полупречника r протиче струја јачине I . Како ће се променити густина струје, ако се полупречник проводника повећа три пута?

$$r_{\text{проц}} = r, r_{\text{кр}} = 3 \cdot r, S_{\text{проц}} = r_{\text{проц}}^2 \pi = r^2 \pi, S_{\text{кр}} = r_{\text{кр}}^2 \pi = 9 \cdot r^2 \pi$$

$$J_{\text{проц}} = \frac{I}{S_{\text{проц}}} = \frac{I}{r^2 \pi}, J_{\text{кр}} = \frac{I}{S_{\text{кр}}} = \frac{I}{9r^2 \pi}$$

$$\frac{J_{\text{кр}}}{J_{\text{проц}}} = \frac{\frac{I}{9r^2 \pi}}{\frac{I}{r^2 \pi}} = \frac{1}{9}, J_{\text{кр}} = \frac{J_{\text{проц}}}{9}$$

3. Кроз проводник облика шупље цеви унутрашњег пречника $d_{\text{ун}} = 2,5 \text{ cm}$ и дебљине $\delta = 2 \text{ mm}$ протиче струја јачине $I = 10 \text{ A}$. Одредити густину струје у проводнику.

$$r_{\text{ун}} = \frac{d_{\text{ун}}}{2} = 12,5 \text{ mm}, r_{\text{сп}} = r_{\text{ун}} + \delta = 14,5 \text{ mm},$$

$$S = r_{\text{сп}}^2 \cdot \pi - r_{\text{ун}}^2 \cdot \pi = 170 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$J = \frac{I}{S} = 0,059 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

3.6 Први Кирхофов закон

Алгебарски збир свих струја које улазе и излазе из неког чвора једнак је нули.

$$\sum I = 0 \quad (3.3)$$

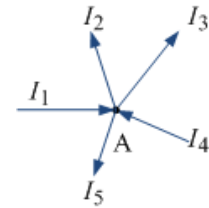
Појам алгебарски подразумева да струје које улазе у чвор имају предзнак минус, а оне које излазе из чвора предзнак плус.

За чвор А приказан на слици 3.3 важи:

$$-I_1 + I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = 0$$

Или друга интерпретација: збир свих струја које улазе у неки чвор једнак је збиру свих струја које излазе из њега, па је једначина тада:

$$I_2 + I_3 + I_5 = I_1 + I_4$$



Слика 3.3

3.7 Електрична отпорност

Електрична отпорност је отпор који материјал пружа протицању електричне струје. Наиме, структура материјала омета усмерено кретање електрона. Електрична отпорност се обележава са R , а јединица је ом $[\Omega]$. Електрична отпорност зависи од дужине проводника l , његовог попречног пресека S и специфичне отпорности ρ :

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S} \quad (3.4)$$

Специфична отпорност зависи од врсте материјала и температуре.

$$\rho = \frac{E}{J} \quad (3.5)$$

Јединица за специфичну отпорност је:

$$\rho = \frac{E}{J} = \left[\frac{\frac{V}{m}}{\frac{A}{m^2}} \right] = \left[\frac{V}{A} m \right] = [\Omega m]$$

За проводник приказан на слици 3.4

важи:

$$\rho = \frac{E}{J}, J = \frac{I}{S} \text{ и } E = \frac{U}{l}$$

Одавде је:

$$U = E \cdot l = \rho \cdot J \cdot l = \rho \cdot l \cdot \frac{I}{S}$$

$$\frac{U}{l} = \frac{\rho \cdot l}{S} = R$$

За један проводник ρ , l и S су константни, па је напон сразмеран струји:

$$U = R \cdot I \quad (3.6)$$

Како је $R = \frac{U}{I} \Rightarrow [\Omega] = \left[\frac{V}{A} \right]$

Бројни примери:

- Одредити електричну отпорност проводника дужине $l = 10 \text{ m}$ површине попречног пресека $S = 1 \text{ mm}^2$ направљеног од бакра $\rho = 1,6 \cdot 10^{-8} \Omega m$.

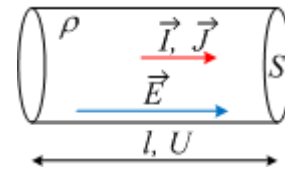
$$R = \frac{\rho \cdot l}{S} = \frac{1,6 \cdot 10^{-8} \Omega m \cdot 10 \text{ m}}{1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 0,178 \Omega$$

- Одредити како се односе дужине два проводника једнаких отпорности, ако им пречници стоје у односу $d_1 : d_2 = 2 : 1$. Специфични отпори ових проводника су

$$\rho_1 = 1,78 \cdot 10^{-8} \Omega m \text{ и } \rho_2 = 4,45 \cdot 10^{-9} \Omega m.$$

$$d_1 = 2d_2, R_1 = R_2,$$

$$S_1 = \frac{d_1^2 \pi}{4} = \frac{4d_2^2 \pi}{4}, S_2 = \frac{d_2^2 \pi}{4},$$



Слика 3.4 Уз електричну отпорност

$$\frac{\rho_1 \cdot l_1}{S_1} = 1 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{4,45 \cdot 10^{-9} \Omega m}{0,445 \cdot 10^{-8} \Omega m} = 1$$

3. Проводник од бабра, $\rho = 1,78 \cdot 10^{-8} \Omega m$, је исечен на $N = 16$ једнаких делова. Отпорност сваког добијеног дела износи $R_1 = 5 m\Omega$. Површина попречног пресека проводника је $S = 2 mm^2$. Колика је почетна дужина проводника?

$$R = N \cdot R_1 = 80 m\Omega, l = \frac{R \cdot S}{\rho} = 8,9 m$$

3.8 Зависност ρ и R од температуре

При већој температури веће је термичко кретање електрона па је потребно и јаче поље да се они усмере.

$$\rho(t_1) = \rho(20^\circ C) \cdot [1 + \alpha(t_1 - 20^\circ C)] \quad (3.7)$$

$$R(t_1) = R(20^\circ C) \cdot [1 + \alpha(t_1 - 20^\circ C)] \quad (3.8)$$

Где су:

t_1 произвољна температура,

$\rho(20^\circ C)$ специфична отпорност на собној температури,

$\rho(t_1)$ специфична отпорност на произвољној температури,

$R(20^\circ C)$ отпорност на собној температури,

$R(t_1)$ отпорност на произвољној температури,

α температурни коефицијент, јединица $\frac{1}{^\circ C}$

Материјал	Специфична отпорност на собној температури $\rho(20^\circ C)$ [Ωm]	Температурни коефицијент α [$\frac{1}{^\circ C}$]
Бакар	$1,6 \cdot 10^{-8}$	0,004
Сребро	$1,5 \cdot 10^{-8}$	0,038
Алуминијум	$2,6 \cdot 10^{-8}$	0,0044
Гвожђе	$8,5 \cdot 10^{-8}$	0,0073
Графит	$3500 \cdot 10^{-8}$	-0,0005
Хромникал	$137 \cdot 10^{-8}$	0,000002
Константин	$49 \cdot 10^{-8}$	0,000005

Табела 1

3.9 Специфична проводност и проводност

Реципрочна вредност специфичне отпорности ρ је специфична проводност γ :

$$\gamma = \frac{1}{\rho} \quad (3.9)$$

Јединица за специфичну проводност је $\left[\frac{1}{\Omega m}\right] = \left[\frac{S}{m}\right]$, где је

$S = \frac{1}{\Omega}$ и назива се сименс.

Електрична проводност је реципрочна вредност електричне отпорности R и обележава се са G . Јединица је сименс [S].

$$G = \frac{1}{R} \quad (3.10)$$

Бројни примери:

1. Отпорност неког отпорника је $R = 40 m\Omega$. Одредити проводност G .

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{40 \cdot 10^{-3} \Omega} = \frac{10^3 S}{40} = \frac{1000 S}{40} = 25 S$$

2. Проводност неког отпорника је $G = 0,05 \text{ S}$. Одредити његову отпорност R .

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{0,05 \text{ S}} = 20 \text{ } \Omega$$

3. Специфична отпорност неког отпорника је $\rho = 1,78 \mu\Omega\text{m}$. Одредити његову специфичну проводност γ .

$$\gamma = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{1,78 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}} = 0,56 \cdot 10^8 \frac{\text{S}}{\text{m}}$$

4. Специфична проводност неког отпорника је $\gamma = 38 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}$. Одредити његову специфичну отпорност ρ .

$$\rho = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{38 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}} = 0,0263 \cdot 10^{-6} \Omega\text{m}$$

5. Отпорност неког отпорника на собној температури је $R(20^\circ\text{C}) = 50 \text{ } \Omega$. Одредити његову отпорност на 120°C и -40°C . Температурни коефицијент материјала од кога је сачињен отпорник је $\alpha = 4,6 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^\circ\text{C}}$.

$$R(t_1) = R(20^\circ\text{C}) \cdot [1 + \alpha(t_1 - 20^\circ\text{C})]$$

$$R(120^\circ\text{C}) = R(20^\circ\text{C}) \cdot [1 + \alpha(120^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})]$$

$$R(120^\circ\text{C}) = 50 \text{ } \Omega \cdot \left[1 + 0,0046 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot (100^\circ\text{C})\right]$$

$$R(120^\circ\text{C}) = 50 \text{ } \Omega \cdot [1 + 0,46]$$

$$R(120^\circ\text{C}) = 73 \text{ } \Omega$$

$$R(-40^\circ\text{C}) = R(20^\circ\text{C}) \cdot [1 + \alpha(-40^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})]$$

$$R(-40^\circ\text{C}) = 50 \text{ } \Omega \cdot \left[1 + 0,0046 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot (-60^\circ\text{C})\right]$$

$$R(-40^\circ\text{C}) = 50 \text{ } \Omega \cdot [1 - 0,27]$$

$$R(-40^\circ\text{C}) = 36,2 \text{ } \Omega$$

6. Специфична отпорност материјала је $\rho(20^\circ\text{C}) = 3,2 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$. Одредити његову специфичну отпорност на -200°C . Температурни коефицијент материјала је $\alpha = 3,6 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^\circ\text{C}}$.

$$\rho(t_1) = \rho(20^\circ\text{C}) \cdot [1 + \alpha(t_1 - 20^\circ\text{C})]$$

$$\rho(-200^\circ\text{C}) = \rho(20^\circ\text{C}) \cdot [1 + \alpha(-200^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})]$$

$$\rho(-200^\circ\text{C}) = 3,2 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m} \cdot \left[1 + 0,0036 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot (-220^\circ\text{C})\right]$$

$$\rho(-200^\circ\text{C}) = 0,666 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$$

3.10 Омов закон

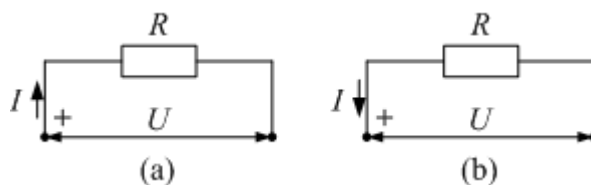
Јачина струје кроз проводник сразмерна је напону на његовим крајевима а обрнуто сразмерна његовој отпорности.

При усаглашеним смеровима, слика 3.5а, важи:

$$I = \frac{U}{R} \quad (3.11)$$

При неусаглашеним смеровима, слика 3.5б, важи:

$$I = -\frac{U}{R}$$



Слика 3.5 Уз Омов закон

3.11 Џулов закон

При протицању струје костантне јачине I кроз проводник отпорности R за време t у проводнику се ослободи одређена количина топлоте Q (топлотна енергија, паралелно се користи и ознака W). Ова количина топлота је једнака раду електростатичких сила A :

$$Q = W = I^2 \cdot R \cdot t \quad (3.12)$$

Јединица за количину топлоте је џул. Заменама из Омовог закона се могу добити следеће једначине:

$$Q = W = I^2 R t = U I t = \frac{U^2}{R} t = A = P \cdot t \quad (3.13)$$

3.12 Снага електричне струје

Снага је бројно једнака раду који се изврши у јединици времена. Снага се означава са P а јединица је ват $[W]$, $\left[\frac{J}{s}\right]$.

$$P = I^2 R = U I = \frac{U^2}{R} = \frac{A}{t} \quad (3.14)$$

Бројни примери:

1. Кроз отпорник отпорности $R = 5 \text{ k}\Omega$ протиче струја јачине $I = 2 \text{ mA}$ за време од $t = 2 \text{ min}$. Одредити напон на отпорнику, снагу и ослобођену количину топлоте.

$$U = R \cdot I = 5 \cdot 10^3 \Omega \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 10 \text{ V}$$

$$P = U I = 10 \text{ V} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 20 \text{ mW}$$

$$Q = W = P \cdot t = 20 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cdot 120 \text{ s} = 2,4 \text{ J}$$

2. Када се на извор од $U = 220 \text{ V}$ прикључи грејалица, кроз коло протиче струја од $I = 5 \text{ A}$. Одредити отпорност грејалице, снагу и ослобођену количину топлоте за време од $t = 1 \text{ h}$.

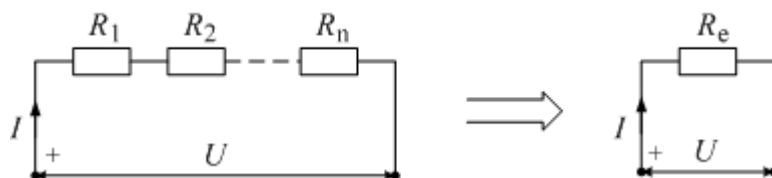
$$R = \frac{U}{I} = \frac{220 \text{ V}}{5 \text{ A}} = 44 \Omega, P = U I = 1,1 \text{ kW}, Q = W = P \cdot t = 3,96 \text{ MJ}$$

3. Бакарна проводник дужине $l = 110 \text{ m}$ и попречног пресека 1 mm^2 укључена је на напон од $U = 12 \text{ V}$. Специфична отпорност бакра је $\rho = 1,78 \mu\Omega \text{ cm}$. Одредити јачину и густину струје у проводнику.

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S} = 195,8 \Omega, I = \frac{U}{R} = 0,061 \text{ A}, J = \frac{I}{S} = 61 \cdot 10^3 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

3.13 Везивање отпорника и еквивалентна отпорност

1. Редна веза отпорника



Слика 3.6 Уз редну везу отпорника

Вредност еквивалентног отпорника R_e се одређује према изразу:

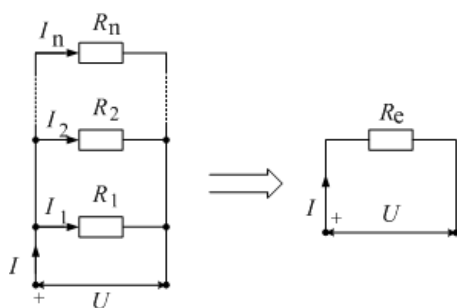
$$R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (3.15)$$

Ако су вредности отпорника $R_1 \neq R_2 \neq R_3 \dots$:

1. Струје кроз отпорнике су $I_1 = I_2 = I_3 \dots = I$

2. Напони на отпорницима су $U_1 \neq U_2 \neq U_3 \dots = U_e$
3. Укупни напон је $U = U_e = U_1 + U_2 + U_3 + \dots$
4. Вредност еквивалентног отпорника R_e је већа од највеће вредности свих отпорника у вези
5. За n једнаких редно везаних отпорника важи $R_e = nR_1$

2. Паралелна веза отпорника



Слика 3.7 Уз паралелну везу отпорника

Вредност еквивалентног отпорника R_e се одређује према изразу:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (3.16)$$

За паралелну везу два отпорника важи:

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.17)$$

За паралелну везу три отпорника важи:

$$R_{123} = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1} \quad (3.18)$$

Ако су вредности отпорника $R_1 \neq R_2 \neq R_3 \dots$:

1. Струје кроз отпорнике су $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \dots$
2. Напони на отпорницима су $U_1 = U_2 = U_3 \dots = U_e = U$
3. Укупна струја је $I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots$
4. Вредност еквивалентног отпорника R_e је мања од најмање вредности свих отпорника у вези
5. За n једнаких паралелно везаних отпорника важи $R_e = \frac{R_1}{n}$

Бројни примери:

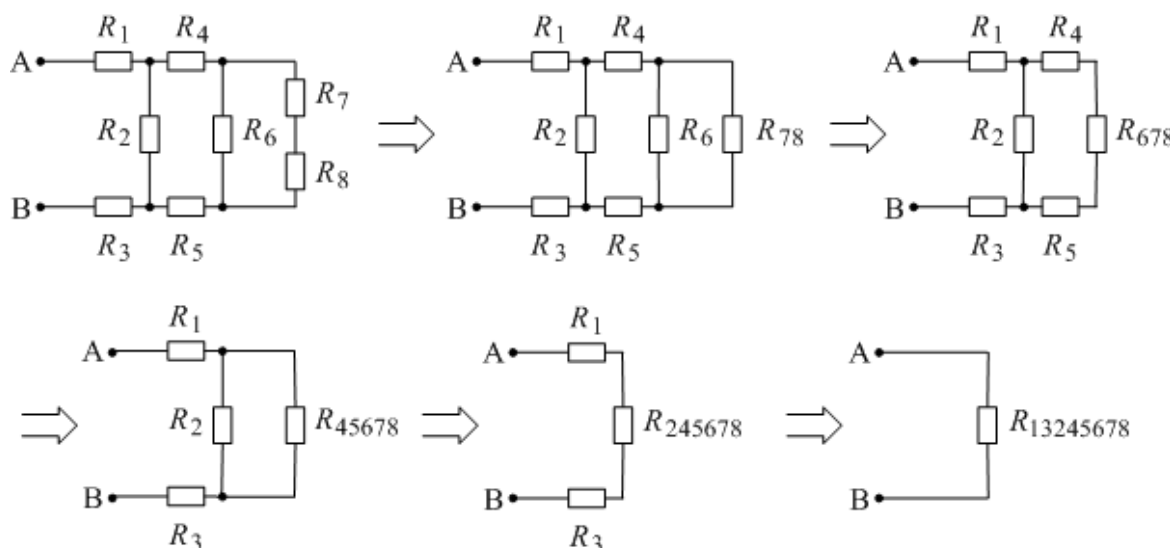
1. Отпорници отпорности $R = 7 \Omega$ су везани редно. Еквивалентна отпорност везе износи $R_e = 91 \Omega$. Одредити колико има редно везаних отпорника.

$$R_e = nR_1 \Rightarrow n = \frac{R_e}{R_1} = \frac{91 \Omega}{7 \Omega} = 13$$

2. Отпорници отпорности $R = 187 \Omega$ су везани паралелно. Еквивалентна отпорност везе износи $R_e = 11 \Omega$. Одредити колико има паралелно везаних отпорника.

$$R_e = \frac{R_1}{n} \Rightarrow n = \frac{R_1}{R_e} = \frac{187 \Omega}{11 \Omega} = 17$$

3. Мешовита веза отпорника



Слика 3.8 Уз мешовиту везу отпорника

Пример 1, слика 3.8

Подаци:

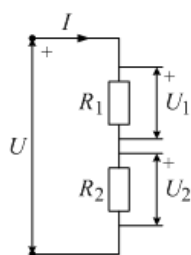
$$R_1 = 2 \Omega, R_2 = 6 \Omega, R_3 = 3 \Omega, R_4 = 3 \Omega, R_5 = 1 \Omega, R_6 = 3 \Omega, R_7 = 4 \Omega, R_8 = 2 \Omega.$$

Поступак:

$$R_{78} = R_7 + R_8 = 6 \Omega, R_{678} = \frac{R_6 \cdot R_{78}}{R_6 + R_{78}} = 2 \Omega, R_{45678} = R_4 + R_5 + R_{678} = 6 \Omega,$$

$$R_{245678} = \frac{R_2 \cdot R_{45678}}{R_2 + R_{45678}} = 3 \Omega, R_{AB} = R_1 + R_{245678} + R_3 = 8 \Omega$$

3.14 Напонски разделник



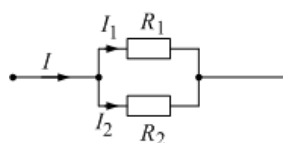
Слика 3.9 Уз напонски разделник

Напони на отпорницима су:

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U \quad (3.19)$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U$$

3.15 Струјни разделник



Слика 3.10 Уз струјни разделник

Струје у гранама су:

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I \quad (3.20)$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I$$

Бројни примери:

1. Отпорници $R_1 = 5 \Omega$ и $R_2 = 20 \Omega$ су везани редно и прикључени на напон $U = 100 V$, слика 3.9. Преко једначина напонског разделника одредити напоне на сваком отпорнику.

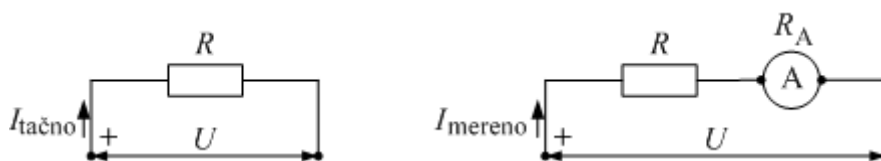
$$U_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2} \cdot U = \frac{5 \Omega}{5 \Omega+20 \Omega} \cdot 100 V = 20 V, U_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot U = 80 V$$

2. Отпорници $R_1 = 3 \Omega$ и $R_2 = 6 \Omega$ су везани паралелно. Струја напојне гране је $I = 45 A$, слика 3.10. Преко једначина струјног разделника одредити јачине струје кроз сваки отпорник.

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot I = \frac{6 \Omega}{3 \Omega+6 \Omega} \cdot 45 A = 30 A, I_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2} \cdot I = 15 A$$

3.16 Мерење јачине струје

Јачина струје се мери амперметром. Његов унутрашњи отпор треба да буде што мањи. Идеални амперметар има унутрашњу отпорност једнаку нули. У коло се везује редно.



Слика 3.11 Уз мерење јачине струје

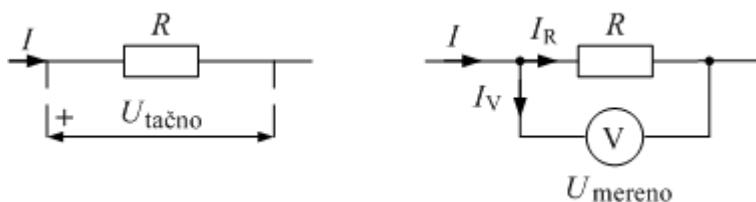
$$I_{\text{тачно}} = \frac{U}{R}$$

$$I_{\text{мерено}} = \frac{U}{R+R_A}$$

Опсег мерења амперметра може се проширити додавањем паралелно везаног додатног отпорника на амперметар.

3.17 Мерење напона

Напон се мери волтметром. Његов унутрашњи отпор треба да буде што већи. Идеалан волтметар има бесконачну унутрашњу отпорност. Везује се паралелно.



Слика 3.12 Уз мерење напона

$$U_{\text{тачно}} = RI$$

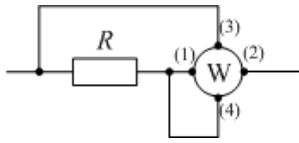
$$U_{\text{мерено}} = R_V \cdot I_V = R \cdot I_R$$

Опсег мерења волтметра може се проширити додавањем редно везаног додатног отпорника на волтметар.

3.18 Мерење снаге

Врши се:

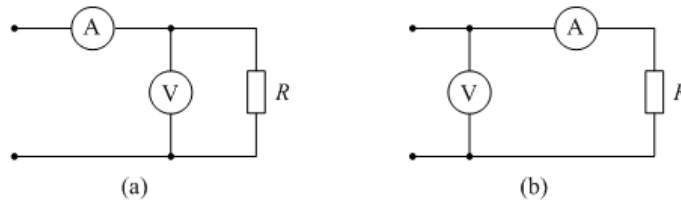
1. директним читавањем



Ватметар има 4 прикључка. Струјни прикључци (1 и 2) се везују на ред са пријемником а напонски (3 и 4) у паралелу.

Слика 3.13 Везивање ватметра

2. методом амперметра и волтметра



Слика 3.14 Уз методу амперметра и волтметра

Шема приказана на слици 3.14а се користи за мерење малих снага, а на слици 3.14b за мерење великих снага.

3.19 Електрични генератори, електромоторна сила, унутрашња отпорност генератора

Електрични генератор претвара енергију друге врсте (механичку, хемијску, топлотну) у електричну. Рад који се изврши у извору за раздвајање позитивних и негативних наелектрисања и стварање потенцијалне разлике је:

$$A = Q \cdot U'$$

Напон на крајевима извора кад није у колу се назива електромоторна сила, EMS, E . Јединица за електромоторну силу је волт. Смер (скалар) је од минуса ка плусу.

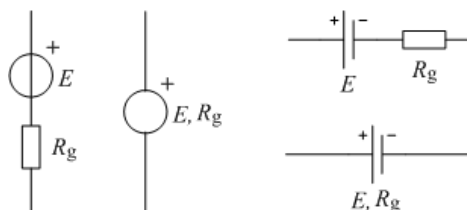
$$E = U' = \frac{A}{Q}$$

Када се коло затвори, кроз њега протекне струја $I = \frac{Q}{t}$. Рад који врши генератор да одржи ову струју је $A = Q \cdot E = I \cdot E \cdot t$. Снага је $P = E \cdot I$.

Када кроз генератор тече струја један део његове енергије се због унутрашње отпорности генератора претвори у топлоту. То су губици, $P_g = R_g \cdot I^2$.

$$P_g = R_g \cdot I^2$$

Шематски приказ генератора:



Слика 3.15 Уз генераторе

3.20 Просто коло

По закону о одржању енергије:

$$E \cdot I \cdot t = R_g \cdot I^2 \cdot t + R \cdot I^2 \cdot t$$

$$E \cdot I = R_g \cdot I^2 + R \cdot I^2$$

$E = R_g \cdot I + R \cdot I$, па је јачина струје у колу:

$$I = \frac{E}{R + R_g} \quad (3.21)$$

Уложена снага је:

$$P_{ul} = P_E = E \cdot I \quad (3.22)$$

Корисна снага је:

$$P_k = P_R = R \cdot I^2 \quad (3.23)$$

Губици су:

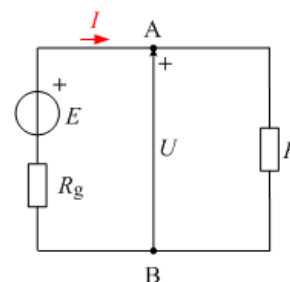
$$P_{gub} = P_{R_g} = R_g \cdot I^2 \quad (3.24)$$

Степен искоришћења је:

$$\eta = \frac{P_k}{P_{ul}} = \frac{R \cdot I^2}{E \cdot I} = \frac{R \cdot I^2}{R_g \cdot I^2 + R \cdot I^2} = \frac{R}{R_g + R} \quad (3.25)$$

Степен искоришћења је неименован број, креће се између 0 и 1. $\eta\% = \eta \cdot 100$.

Код идеалног генератора унутрашња отпорност је $R_g = 0$, па је степен искоришћења једнак јединици.



Слика 3.16 Уз просто коло

3.21 Напон на прикључцима генератора, режими рада

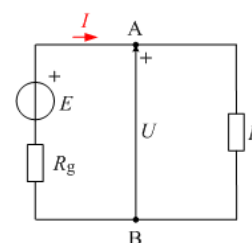
Једначина простог кола $E = R_g \cdot I + R \cdot I$, може се

написати и у облику:

$$E - R_g \cdot I = R \cdot I = U_{AB} = U$$

Напон на крајевима генератора $U = E - R_g \cdot I$ једнак је електромоторној сили E ако је:

1. генератор у празном ходу, $I = 0$,
2. генератор је идеалан, $R_g = 0$



Слика 3.17 Уз напон генератора

Режими рада генератора:

режим празног хода

На крајевима генератора нема пријемника, коло је отворено па је струја у колу једнака: $I = 0$

Ако у колу нема пријемника, може се сматрати да је његова отпорност $R = \infty$

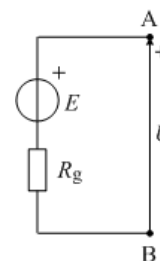
Напон на крајевима генератора је: $U = E$.

Корисна снага је: $P_k = 0$.

Уложена снага је: $P_{ul} = 0$

Губици су: $P_{gub} = 0$

Степен искоришћења је $\eta = 1$.



Слика 3.18 Уз режим празног хода

Режим кратког споја

Крајеви генератора су кратко спојени. Може се сматрати да је $R = 0$.

Напон на крајевима генератора је: $U = 0$

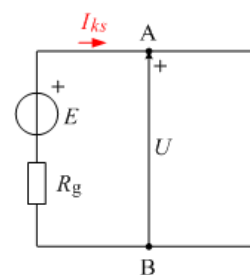
Кроз коло протиче струја кратког споја: $I_{ks} = \frac{E}{R_g}$

Корисна снага је: $P_k = 0$.

Уложена снага је: $P_{ul} = E \cdot I_{ks} = \frac{E^2}{R_g}$

Губици су максимални: $P_{gub} = \frac{E^2}{R_g}$

Степен искоришћења је $\eta = 0$.



Слика 3.19 Уз режим кратког споја

Прилагођење по снази – услов за добијање максималне корисне снаге

Из једначина простог кола може се извести израз за корисну снагу:

$$P_k = E^2 \frac{R}{(R_g + R)^2} \quad (3.26)$$

Максимална корисна снага се добија када је испуњен услов:

$$R = R_g \quad (3.27)$$

При испуњеном овом услову, максимална корисна снага износи:

$$P_{kmax} = \frac{E^2}{4 \cdot R_g} \quad (3.28)$$

Струја у колу је:

$$I = \frac{E}{2 \cdot R_g} = \frac{I_{ks}}{2} \quad (3.29)$$

Напон на крајевима генератора је:

$$U = \frac{E}{2} \quad (3.30)$$

Уложена снага је:

$$P_{ul} = \frac{E^2}{2 \cdot R_g} \quad (3.31)$$

Губици су:

$$P_{gub} = \frac{E^2}{4 \cdot R_g} \quad (3.32)$$

Степен искоришћења је $\eta = 0,5$.

Бројни примери:

1. Просто коло приказано на слици 3.16 има следће податке: $E = 30 \text{ V}$, $R_g = 2 \Omega$,

$R = 8 \Omega$. Одредити:

- a) Јачину струје I (једначина 3.21):

$$I = \frac{E}{R + R_g} = \frac{30 \text{ V}}{8 \Omega + 2 \Omega} = 3 \text{ A}$$

- b) Уложену снагу P_{ul} (3.22):

$$P_{ul} = P_E = E \cdot I = 30 \text{ V} \cdot 3 \text{ A} = 90 \text{ W}$$

- c) Корисну снагу P_k (3.23):

$$P_k = P_R = R \cdot I^2 = 8 \Omega \cdot (3 \text{ A})^2 = 72 \text{ W}$$

- d) Снагу губитака P_{gub} (3.24):

$$P_{gub} = P_{R_g} = R_g \cdot I^2 = 18 \text{ W}$$

- e) Степен искоришћења η (3.25):

$$\eta = \frac{P_k}{P_{ul}} = \frac{72 \text{ W}}{90 \text{ W}} = 0.8$$

- f) Напон на крајевима генератора U_{AB} :

$$U_{AB} = E - R_g \cdot I = 24 \text{ V}$$

g) Струју кратког споја генератора I_{ks} :

$$I_{ks} = \frac{E}{R_g} = 15 \text{ A}$$

h) Вредност отпорност потрошача R' да би било извршено прилагођење по снази:

$$R' = R_g = 2 \Omega$$

i) Јачину струје ако је извршено прилагођење по снази I' :

$$I' = \frac{E}{R' + R_g} = 7,5 \text{ A}$$

j) Уложену снагу ако је извршено прилагођење по снази P'_{ul} :

$$P'_{ul} = E \cdot I' = 225 \text{ W}$$

k) Корисну снагу ако је извршено прилагођење по снази P'_k :

$$P'_k = R' \cdot I'^2 = 112,5 \text{ W}$$

l) Снагу губитака ако је извршено прилагођење по снази P'_{gub} :

$$P'_{gub} = P_{R_g} = R_g \cdot I'^2 = 112,5 \text{ W}$$

m) Степен искоришћења ако је извршено прилагођење по снази η' :

$$\eta' = \frac{P'_k}{P'_{ul}} = 0,5$$

n) Напон на крајевима генератора ако је извршено прилагођење по снази U'_{AB} :

$$U'_{AB} = E - R_g \cdot I' = 15 \text{ V}$$

2. Одредити колико износи унутрашња отпорност генератора код кога се при повећању отпорности пријемника са 5Ω на 15Ω степен искоришћења повећа за 50%.

$$R_1 = 5 \Omega, \eta_1 = \frac{R_1}{R_g + R_1}$$

$$R_2 = 15 \Omega, \eta_2 = \frac{R_2}{R_g + R_2}$$

$$\eta_2 = 1,5 \cdot \eta_1$$

$$\frac{R_2}{R_g + R_2} = 1,5 \cdot \frac{R_1}{R_g + R_1}$$

$$R_2 \cdot (R_g + R_1) = 1,5 \cdot R_1 \cdot (R_g + R_2)$$

$$15 \Omega \cdot (R_g + 5 \Omega) = 1,5 \cdot 5 \Omega \cdot (R_g + 15 \Omega)$$

$$2 \cdot (R_g + 5 \Omega) = 1 \cdot (R_g + 15 \Omega)$$

$$R_g = 5 \Omega$$

3.22 Просто коло са више генератора и пријемника

Други Кирхофов закон: Алгебарски збир свих електромоторних сила и падова напона по било којој затвореној контури једнак је нули. Постоји више правила за писање ове једначине:

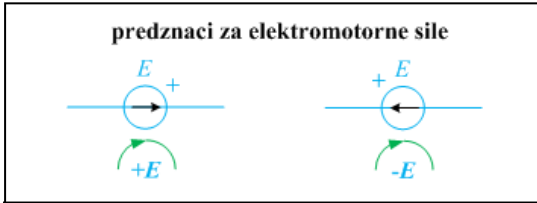
a) Правило од В ка А: $\sum E - \sum R \cdot I = 0$

b) Правило од А ка В: $\sum R \cdot I - \sum E = 0$

c) Правило $\sum E = \sum R \cdot I$

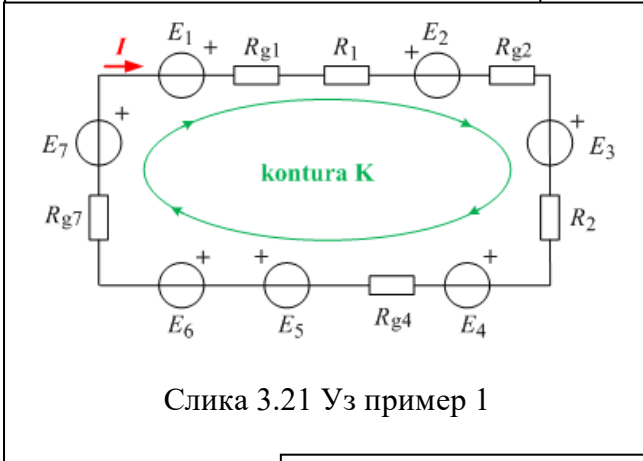
Напомена: да би се избегле грешке, треба изабрати и примењивати само један начин писања другог Кирхофовог закона.

Правило $\sum E = \sum R \cdot I$



Пример 1

Одредити јачину струје у колу приказаном на слици 3.21.



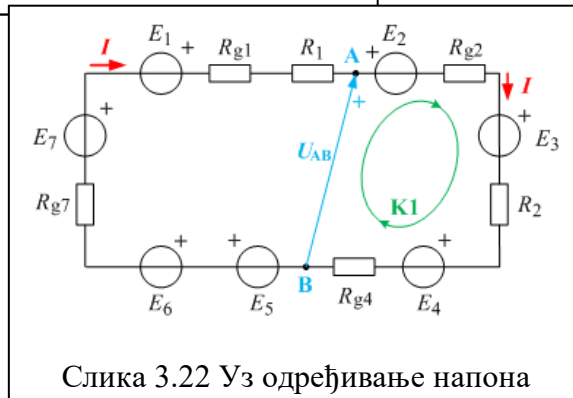
Слика 3.21 Уз пример 1

$$R_{g1}I + R_1I + R_{g2}I + R_2I + R_{g4}I + R_{g7}I = E_1 - E_2 - E_3 - E_4 + E_5 - E_6 + E_7$$

$$I \cdot (R_{g1} + R_1 + R_{g2} + R_2 + R_{g4} + R_{g7}) = E_1 - E_2 - E_3 - E_4 + E_5 - E_6 + E_7$$

$$I = \frac{E_1 - E_2 - E_3 - E_4 + E_5 - E_6 + E_7}{R_{g1} + R_1 + R_{g2} + R_2 + R_{g4} + R_{g7}}$$

3.23 Напон између две тачке U_{AB}



Слика 3.22 Уз одређивање напона

Пример 2

За коло приказано на слици 3.22 одредити напон U_{AB}

$$R_{g2}I + R_2I + R_{g4}I = -E_2 - E_3 - E_4 + U_{AB}$$

Бројни примери:

1. За коло приказано на слици 3.21 познати су подаци:

$$E_1 = 100 \text{ V}, E_2 = 20 \text{ V}, E_3 = 30 \text{ V}, E_4 = 40 \text{ V}, E_5 = 30 \text{ V}, E_6 = 60 \text{ V}, E_7 = 50 \text{ V},$$

$$R_{g1} = R_{g2} = R_{g4} = R_{g7} = 1 \Omega, R_1 = 6 \Omega \text{ и } R_2 = 5 \Omega. \text{ Одредити:}$$

- a) Јачину струје у колу

$$I = \frac{E_1 - E_2 - E_3 - E_4 + E_5 - E_6 + E_7}{R_{g1} + R_1 + R_{g2} + R_2 + R_{g4} + R_{g7}} = 2 \text{ A}$$
- b) Снаге на потрошачима R_1 и R_2
 $P_{R1} = R_1 \cdot I^2 = 24 \text{ W}$, (Троши)
 $P_{R2} = R_2 \cdot I^2 = 20 \text{ W}$, (Троши)
- c) Снаге на унутрашњим отпорностима
 $P_{Rg1} = R_{g1} \cdot I^2 = 4 \text{ W}$, (Троши)
 $P_{Rg2} = R_{g2} \cdot I^2 = 4 \text{ W}$, (Троши)
 $P_{Rg3} = R_{g3} \cdot I^2 = 4 \text{ W}$, (Троши)
 $P_{Rg4} = R_{g4} \cdot I^2 = 4 \text{ W}$, (Троши)
- d) Снаге генератора (према правилима приказаним на слици 3.20)
 $P_{E1} = +E_1 \cdot I = +200 \text{ W}$, (Ради)
 $P_{E2} = -E_2 \cdot I = -40 \text{ W}$, (Троши)
 $P_{E3} = -E_3 \cdot I = -60 \text{ W}$, (Троши)
 $P_{E4} = -E_4 \cdot I = -80 \text{ W}$, (Троши)
 $P_{E5} = +E_5 \cdot I = +60 \text{ W}$, (Ради)
 $P_{E6} = -E_6 \cdot I = -120 \text{ W}$, (Троши)
 $P_{E7} = +E_7 \cdot I = +100 \text{ W}$, (Ради)
- e) Биланс снаге (корисно за проверу, збир снага свих који раде једнак је збиру снага свих који троше; код ЕМС које троше, предзнак – указује да троше, а бројна вредност колико су потрошили, у једначини је све са предзнаком +)
 $(200 + 60 + 100) \text{ W} = (24 + 20 + 4 + 4 + 4 + 4 + 40 + 60 + 80 + 120) \text{ W}$
 $360 \text{ W} = 360 \text{ W}$
- f) Уложена снага P_{ul} , једнака је збиру снага само оних генератора који раде:
 $P_{ul} = P_{E1} + P_{E5} + P_{E7} = 360 \text{ W}$
 Корисна снага P_k , једнака је збиру снага на потрошачима R_1 и R_2
 $P_k = P_{R1} + P_{R2} = 44 \text{ W}$
 Степен искоришћења η :

$$\eta = \frac{P_k}{P_{ul}} = \frac{44 \text{ W}}{360 \text{ W}} = 0.12$$
- g) Снаге које генератори дају у колу P_{Eduk} , може се рачунати само за ЕМС које раде
 $P_{E1duk} = P_{E1} - P_{Rg1} = 196 \text{ W}$
 $P_{E5duk} = P_{E5} = 60 \text{ W}$
 $P_{E7duk} = P_{E7} - P_{Rg7} = 96 \text{ W}$
- h) Струје кратког споја генератора I_{ks} , може се одредити само за генераторе који имају унутрашњу отпорност

$$I_{ks1} = \frac{E_1}{R_{g1}} = 100 \text{ A}$$

$$I_{ks2} = \frac{E_2}{R_{g2}} = 20 \text{ A}$$

$$I_{ks4} = \frac{E_4}{R_{g4}} = 40 \text{ A}$$

$$I_{ks7} = \frac{E_7}{R_{g7}} = 50 \text{ A}$$
- i) Количину топлоте која се ослободи на на потрошачима R_1 и R_2 за 5 min
 $Q_{R1} = P_{R1} \cdot t = 7200 \text{ J}$
 $Q_{R2} = P_{R2} \cdot t = 6000 \text{ J}$

ј) Количину наелектрисања и број елементарних носилаца наелектрисања који прођу кроз коло за време од 10 min

$$Q = I \cdot t = 1200 \text{ C}$$

$$N = \frac{Q}{|e|} = \frac{1200 \text{ C}}{|-1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}|} = 750 \cdot 10^{19}$$

к) Ако је површина попречног пресека проводника којим су елементи у колу повезани $S = 1 \text{ mm}^2$ одредити густину струје

$$J = \frac{I}{S} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

л) Ако се паралелно на отпорник R_1 веже кондензатор $C = 5 \mu\text{F}$, одредити количину наелектрисања на њему и његову енергију

$$U_{R1} = R_1 \cdot I = 12 \text{ V} = U_C$$

$$Q_C = C \cdot U = 60 \mu\text{C}$$

$$W_C = \frac{Q_C \cdot U_C}{2} = 360 \mu\text{J}$$

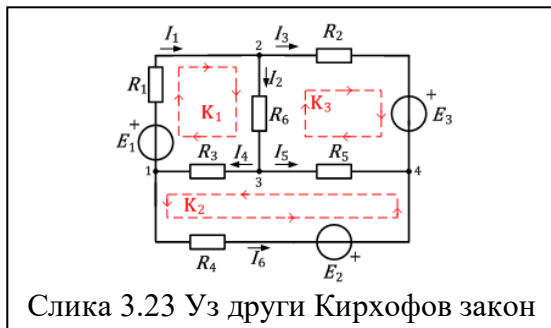
м) Напон између тачака А и В, U_{AB} ; према слици 3.22 добијена је једначина у коју се уврсте све познате вредности и једначина реши.

$$R_{g2}I + R_2I + R_{g4}I = -E_2 - E_3 - E_4 + U_{AB}$$

$$1 \Omega \cdot 2 \text{ A} + 5 \Omega \cdot 2 \text{ A} + 1 \Omega \cdot 2 \text{ A} = -20 \text{ V} - 30 \text{ V} - 40 \text{ V} + U_{AB}$$

$$U_{AB} = 104 \text{ V}$$

2. писање једначина по другом Кирхофовом закону, слика 3.23



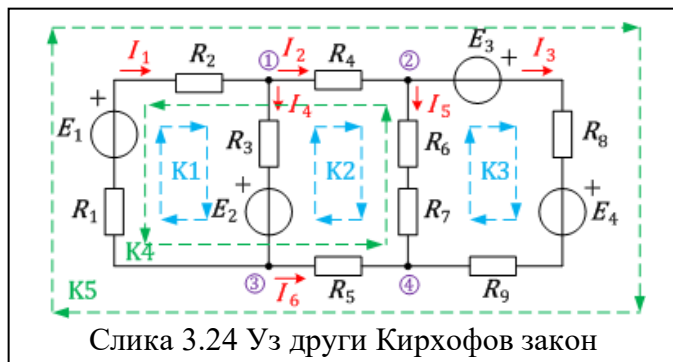
Слика 3.23 Уз други Кирхофов закон

$$R_6 I_2 + R_3 I_4 + R_1 I_1 = E_1 \quad (\text{K1})$$

$$R_3 I_4 + R_4 I_6 - R_5 I_5 = E_2 \quad (\text{K2})$$

$$R_2 I_3 - R_5 I_5 - R_6 I_2 = -E_3 \quad (\text{K3})$$

3. писање једначина по другом Кирхофовом закону, слика 3.24



Слика 3.24 Уз други Кирхофов закон

$$R_2 I_1 + R_3 I_4 + R_1 I_1 = E_1 - E_2 \quad (\text{K1})$$

$$R_4 I_2 + R_6 I_5 + R_7 I_5 - R_5 I_6 - R_3 I_4 = E_2 \quad (\text{K2})$$

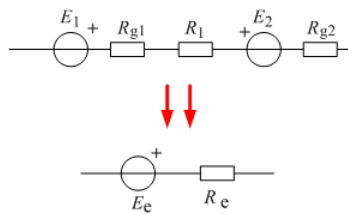
$$R_8 I_3 + R_9 I_3 - R_7 I_5 - R_6 I_5 = E_3 - E_4 \quad (\text{K3})$$

$$-R_1 I_1 + R_5 I_6 - R_7 I_5 - R_6 I_5 - R_4 I_2 - R_2 I_1 = -E_1 \quad (\text{K4})$$

$$R_2 I_1 + R_4 I_2 + R_8 I_3 + R_9 I_3 - R_5 I_6 + R_1 I_1 = E_3 - E_4 + E_1 \quad (\text{K5})$$

3.24 Везивање напонских генератора

редна веза



Слика 3.25 Уз редну везу

За пример приказан на слици 3.25 важи:

$$E_e = E_1 - E_2$$

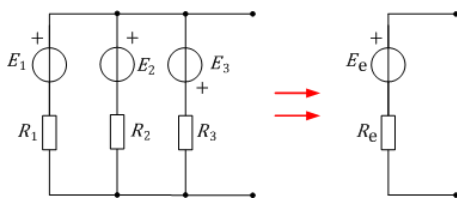
$$R_e = R_{g1} + R_1 + R_{g2}$$

У општем случају важи:

$$E_e = \sum \pm E$$

$$R_e = \sum R$$

паралелна веза



Слика 3.26 Уз паралелну везу

За пример приказан на слици 3.26 важи:

$$E_e = \frac{\frac{E_1 + E_2 - E_3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

У општем случају важи:

$$E_e = \frac{\sum \pm \frac{E}{R}}{\sum \frac{1}{R}}$$

$$\frac{1}{R_e} = \sum \frac{1}{R}$$

Ако има n једнаких генератора тада је $E_e = E$, $R_e = \frac{R}{n}$

Идеалан напонски генератор има унутрашњу отпорност једнаку 0.

Бројни примери:

1. За редну везу, слика 3.25 познати су подаци: $E_1 = 50 \text{ V}$, $E_2 = 20 \text{ V}$, $R_{g1} = 1 \Omega$, $R_{g2} = 3 \Omega$, $R_1 = 10 \Omega$. Замени везу еквивалентним генератором.

$$E_e = E_1 - E_2 = 50 \text{ V} - 20 \text{ V} = 30 \text{ V}, R_e = R_{g1} + R_1 + R_{g2} = 14 \Omega$$

2. За паралелну везу, слика 3.26 познати су подаци: $E_1 = 100 \text{ V}$, $E_2 = 40 \text{ V}$, $E_3 = 20 \text{ V}$, $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$. Замени везу еквивалентним генератором.

$$E_e = \frac{\frac{E_1 + E_2 - E_3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{100\text{V} + 40\text{V} - 20\text{V}}{\frac{1}{20\Omega} + \frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{4\Omega}}}{\frac{1}{20\Omega} + \frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{4\Omega}} = \frac{5+4-5}{0,05+0,1+0,25} \text{ V} = \frac{4}{0,4} \text{ V} = 10\text{V}$$

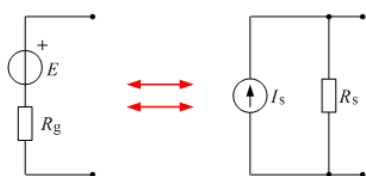
$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{20\Omega} + \frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{4\Omega} = (0,05 + 0,1 + 0,25) \frac{1}{\Omega} = 0,4 \frac{1}{\Omega}$$

$$\frac{R_e}{1} = \frac{1}{0,4} \Omega, R_e = 2,5 \Omega$$

Напомена: R_e се може одредити и преко израза за паралелну везу три отпорника:

$$R_{123} = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1} = \frac{20\Omega \cdot 10\Omega \cdot 4\Omega}{20\Omega \cdot 10\Omega + 10\Omega \cdot 4\Omega + 4\Omega \cdot 20\Omega} = \frac{800\Omega}{320} = 2,5 \Omega$$

3.25 Струјни генератори и везивање струјних генератора



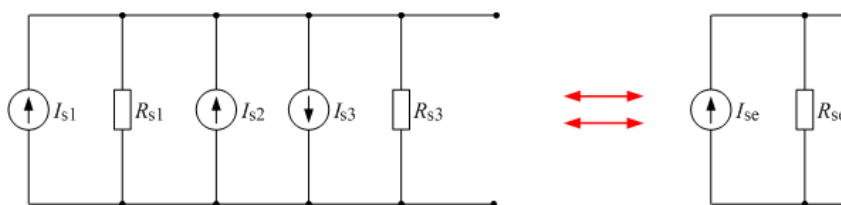
Слика 3.27 Уз струјни генератор

Идеални струјни генератор има бесконачно велику унутрашњу отпорност, $R_s = \infty$
За идеалан напонски генератор не постоји еквивалентни струјни генератор и обрнуто.

$$R_s = R_g$$

$$I_s = \frac{E}{R_g}$$

Паралелна веза струјних генератора



Слика 3.28 Уз паралелну везу струјних генератора

За пример приказан на слици 3.28 важи:

$$I_{se} = I_{s1} + I_{s2} - I_{s3}$$

$$\frac{1}{R_{se}} = \frac{1}{R_{s1}} + \frac{1}{R_{s2}}$$

У општем случају важи:

$$I_{se} = \sum \pm I_s$$

$$\frac{1}{R_{se}} = \sum \frac{1}{R_s}$$

редна веза

Ако су струјни генератори везани редно, потребно је сваки појединачно заменити еквивалентним напонским. Затим те напонске генераторе заменити једним еквивалентним напонским. На крају добијени напонски генератор заменити еквивалентним струјним генератором.

Бројни примери:

1. Трансформисати напонски генератор у струјни, слика 3.27. Подаци: $E = 100 \text{ V}$, $R_g = 5 \Omega$.

$$I_s = \frac{E}{R_g} = \frac{100 \text{ V}}{5 \Omega} = 20 \text{ A}, R_s = R_g = 5 \Omega$$

2. Трансформисати струјни генератор у напонски, слика 3.27. Подаци: $I_s = 5 \text{ mA}$, $R_s = 4 \Omega$.

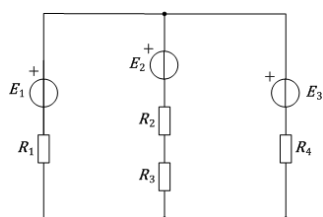
$$E = I_s \cdot R_s = 20 \text{ mV}, R_g = R_s = 4 \Omega$$

3. Паралелну везу струјних генератора са слике 3.28, заменити еквивалентним струјним генератором. Подаци: $I_{s1} = 5 \text{ A}$, $I_{s2} = 13 \text{ A}$, $I_{s3} = 8 \text{ A}$, $R_{s1} = 20 \Omega$, $R_{s3} = 5 \Omega$.

$$I_{se} = I_{s1} + I_{s2} - I_{s3} = 10 \text{ A},$$

$$\frac{1}{R_{se}} = \frac{1}{R_{s1}} + \frac{1}{R_{s2}} = \frac{1}{20 \Omega} + \frac{1}{5 \Omega} = \frac{5}{20 \Omega}, R_{se} = 4 \Omega \text{ или } R_{se} = \frac{R_{s1} \cdot R_{s2}}{R_{s1} + R_{s2}} = 4 \Omega$$

3.26 Решавање сложених кола методом еквивалентирања генератора



Слика 3.29 Уз методу еквивалентирања

Поступак:

1. Еквивалентирати прве две гране, и тако свести ово коло на просто коло. Струја простог кола је струја у трећој грани.
2. Еквивалентирати другу и трећу грану, и тако свести ово коло на просто коло. Струја простог кола је струја у првој грани.
3. Применити први Кирхофов закон за одређивање струје у средњој грани.

3.27 Решавање сложених кола методом Кирхофових закона

Решавање сложених кола методом Кирхофових закона обухвата следеће кораке:

1. Одредити број чворова n_{ζ} , грана n_g и струјних генератора n_s ,
2. По првом Кирхофовом закону се пише тачно $n_{\zeta} - 1$ једначина,
3. По другом Кирхофовом закону се пише тачно $n_g - (n_{\zeta} - 1) - n_s$ једначина,
4. Укупно треба написати и решити систем од $n_g - n_s$ једначина

Напомена:

1. Уколико у колу постоје струјни генератори I_g , контуре **не** обухватају те гране.
2. Уколико је потребно одредити напон на струјном генератору U_g (а то тек на крају, када је већ све остало израчунато), контура се намерно провлачи тако да обухвати грану са струјним генератором.

Пример 1

За коло приказано на слици 3.30 познате су вредности свих параметара: $E_1, E_5, E_7, I_g, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ и R_7 .

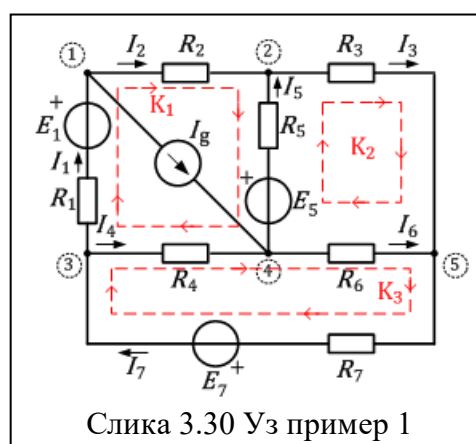
Потребно је одредити струје у свим гранама користећи методу Кирхофових закона.

Шема везе електричног кола се добија “празна“. На њој су само отпорници (R_1, R_2, \dots) и генератори (E_7, I_g).

Затим се прати наведени поступак.

Поступак:

1. Пребројати и обележити бројевима све чворове (као на слици 3.30). Записати: $n_{\zeta} = 5$,
2. Пребројати гране. Записати: $n_g = 8$,



Слика 3.30 Уз пример 1

3. Пребројати струјне генераторе (I_g). Записати:
 $n_s = 1$.
 (ако их у некој шеми нема запише се $n_s = 0$).
4. Број једначина које треба написати по **првом** Кирхофовом закону (ни више ни мање!):
 $n_\zeta - 1 = 4$.
 (n_ζ је број који се добили у тачки 1.)
5. Број једначина које треба написати по **другом** Кирхофовом закону (ни више ни мање!):
 $n_g - (n_\zeta - 1) - n_s = 3$.
6. Укупан број једначина које чине систем једначина је:
 $n_g - n_s = 7$.
 (Дакле, укупан број једначина је једнак броју непознатих струја. У овом случају коло има 8 грана, па кроз коло тече 8 струја, али је једна струја позната (I_g), што значи да је потребно 7 једначина.)
7. У сваку грану поставити струју (I_1, I_2, \dots, I_7). Кроз грану у којој се налази струјни генератор тече његова струја I_g , у смеру стрелице, и не уводи се нова струја (погледати на слици 1). Смерове струја увек бирате сами (сем сада, да би решења била ок)
8. Према тачки 5, по другом Кирхофовом закону треба написати 3 једначине, значи потребно је обележити 3 контуре. Контуре и смер обиласка контуре увек бирате сами (сем сада....)
9. Писање система једначина. (За ово коло систем чини 7 једначина, и то 4 по првом и 3 по другом Кирхофовом закону)

Према обележеним чворовима, струјама и контурама на слици 1 систем једначина је:

Чвор 1: $I_1 = I_2 + I_g$

Чвор 2: $I_3 = I_2 + I_5$

Чвор 3: $I_7 = I_1 + I_4$

Чвор 5: $I_7 = I_3 + I_6$

Контура K_1 : $R_2 I_2 - R_5 I_5 - R_4 I_4 + R_1 I_1 = E_1 - E_5$

Контура K_2 : $R_3 I_3 - R_6 I_6 + R_5 I_5 = E_5$

Контура K_3 : $R_4 I_4 + R_6 I_6 + R_7 I_7 = -E_7$

Напомена: решавање електричних кола методом Кирхофових закона има смисла само уколико је потребно израчунати све струје и ако је укупни број једначина мали. У супротном, користити неку другу методу или теорему.

Одређивање напона на струјном генератору се врши провлачењем било које контуре која пролази кроз грану са тим генератором, на пример:

$$R_2 I_2 - R_5 I_5 = -E_5 - U_g.$$

(Ова контура није обележена на слици, покушајте да нађете која је у питању и који је смер обиласка). За дефинисање напона струјног генератора U_g , потребно је на слици ставити знак + поред врха стрелице струјног генератора, и поред записати U_g .

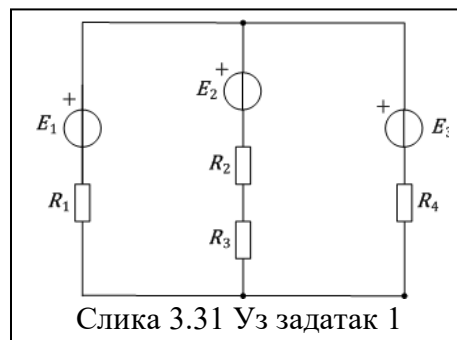
Задатак 1

У колу приказаном на слици 3.31 познате су вредности свих параметара:

$$R_1 = 2 \Omega, R_2 = 3 \Omega, R_3 = 4 \Omega, R_4 = 5 \Omega,$$

$$E_1 = 56 \text{ V}, E_2 = 15 \text{ V}, E_3 = 60 \text{ V}.$$

Применом метода Кирхофових закона одредити струје у свим гранама кола.



Слика 3.31 Уз задатак 1

Решење:

Број чворова $n_{\zeta} = 2$

Број грана $n_g = 3$

Број струјних генератора $n_s = 0$

Број једначина по првом Кирхофовом закону је:

$$n_{\zeta} - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ једначина}$$

Број једначина по другом Кирхофовом закону је:

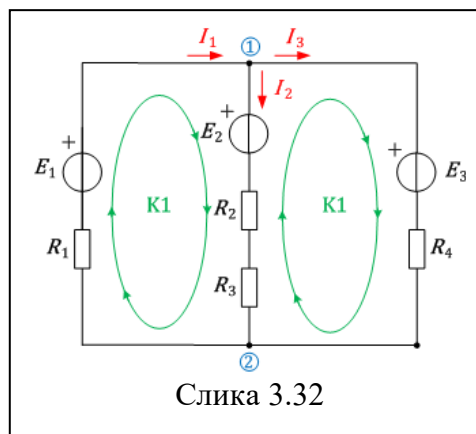
$$n_g - (n_{\zeta} - 1) - n_s = 3 - (2 - 1) - 0 = 2$$

Следећи кораци су:

а) обележити чворове (1 и 2, слика 3.32)

б) поставити струје (3 гране \Rightarrow 3 струје, смер произвољан, али када се једном постави, нема измена) На слици 2 су приказане постављене струје I_1 , I_2 и I_3 у назначеном смеру.

в) обележити контуре (у колу постоје 3 контуре, али је потребно изабрати само 2, број потребних контура једнак је броју једначина које се пишу по другом Кирхофовом закону). На слици 3.32 су приказане две изабране контуре **K1** и **K2** у назначеном смеру.



Слика 3.32

Писање једначина:

Потребно је укупно написати 3 једначине, једна по првом Кирхофовом закону и две по другом. Све три једначине морају бити написане једна испод друге, и подвучено после треће једначине (систем једначина). Према слици 3.32 ове једначине су:

$$\text{чвор 1:} \quad I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$

$$\text{контура K1:} \quad R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_2 = E_1 - E_2 \quad (2)$$

$$\text{контура K2:} \quad R_4 \cdot I_3 - R_3 \cdot I_2 - R_2 \cdot I_2 = E_2 - E_3 \quad (3)$$

Следећи корак је замена бројних вредности у систем једначина:

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$

$$2 \Omega \cdot I_1 + 3 \Omega \cdot I_2 + 4 \Omega \cdot I_2 = 56 \text{ V} - 15 \text{ V} \quad (2)$$

$$5 \Omega \cdot I_3 - 4 \Omega \cdot I_2 - 3 \Omega \cdot I_2 = 15 \text{ V} - 60 \text{ V} \quad (3)$$

Сада се у свакој појединачној једначини среди шта може. У једначини (1) нема шта да се ради, па ће се она само преписати. У једначини (2) могу се сабрати бројеви уз I_2 , и средити десна страна. Слично и у једначини (3).

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$

$$2 \Omega \cdot I_1 + 7 \Omega \cdot I_2 = 41 V \quad (2)$$

$$\underline{5 \Omega \cdot I_3 - 7 \Omega \cdot I_2 = -45 V} \quad (3)$$

Напомена: ни случајно не сме да се крати +7 Ω · I₂ из друге једначине и -7 Ω · I₂ из треће!!!!!!!!!!!!!!!!!! (овакву глупост увек уради 15% ученика, и то ће бити санкционисано!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!)

Следећи корак је примена методе замене. Једначина (1) се замени у једначину (2). (Уместо струје I_1 се у другој једначини пише $(I_2 + I_3)$). Једначина (1) се више не пише, систем се свео на две једначине са две непознате:

$$2 \Omega \cdot (I_2 + I_3) + 7 \Omega \cdot I_2 = 41 V \quad (2)$$

$$\underline{5 \Omega \cdot I_3 - 7 \Omega \cdot I_2 = -45 V} \quad (3)$$

Сада је потребно ослободити се заграде у једначини (2). Једначина (3) се само преписује.

$$2 \Omega \cdot I_2 + 2 \Omega \cdot I_3 + 7 \Omega \cdot I_2 = 41 V \quad (2)$$

$$\underline{5 \Omega \cdot I_3 - 7 \Omega \cdot I_2 = -45 V} \quad (3)$$

Следећи корак је сабирање бројева уз I_2 .

$$9 \Omega \cdot I_2 + 2 \Omega \cdot I_3 = 41 V \quad (2)$$

$$\underline{5 \Omega \cdot I_3 - 7 \Omega \cdot I_2 = -45 V} \quad (3)$$

Када мало пажљивије погледате систем, прве сабирке са леве стране у обе једначине, види се да је испод струје I_2 записана струја I_3 . Исти случај је и у продужетку, испод струје I_3 записана је струја I_2 . (ово не мора да се увек догоди, зависи одакле почињете да пишете једначине контуре). Ако су струје I_2 одмах „постројене“ једна испод друге и струје I_3 једна испод друге, онда следећи корак не морате да радите. Ако то није случај (као сад), онда је потребно заменити места сабирцима у једначини (2):

$$2 \Omega \cdot I_3 + 9 \Omega \cdot I_2 = 41 V \quad (2)$$

$$\underline{5 \Omega \cdot I_3 - 7 \Omega \cdot I_2 = -45 V} \quad (3)$$

Овај систем је сада потребно решити методом супротних коефицијената. У једначини (2) је сабирак $+9 \Omega \cdot I_2$. У једначини (3) је сабирак $-7 \Omega \cdot I_2$. Они су већ супротног знака и то треба искористити. Да би и „бројеви“ уз I_2 у обе једначине били једнаки потребно је **целу** једначину (2) помножити са 7, и **целу** једначину (3) помножити са 9.

$$2 \Omega \cdot I_3 + 9 \Omega \cdot I_2 = 41 V \quad / \cdot 7 \quad (2)$$

$$\underline{5 \Omega \cdot I_3 - 7 \Omega \cdot I_2 = -45 V} \quad / \cdot 9 \quad (3)$$

После множења једначине су:

$$14 \Omega \cdot I_3 + 63 \Omega \cdot I_2 = 287 V \quad (2)$$

$$45 \Omega \cdot I_3 - 63 \Omega \cdot I_2 = -405 V \quad (3)$$

Напомена: ни случајно не сме да се крти (прецртава) $+63 \Omega \cdot I_2$ из друге једначине и $-63 \Omega \cdot I_2$ из треће!!!!!!!!!!!!!!

На крају, ове две једначине треба **САБРАТИ**.

$$59 \Omega \cdot I_3 + 0 \cdot I_2 = -118 V$$

односно

$$59 \Omega \cdot I_3 = -118 V$$

Одавде је:

$$I_3 = \frac{-118 V}{59 \Omega}$$

$$I_3 = -2 A$$

Сада се треба вратити пар једначина уназад, изабрати само једну и преписати је. На пример:

$$2 \Omega \cdot I_3 + 9 \Omega \cdot I_2 = 41 V \quad (2)$$

У изабрану једначину се замењује израчуната вредност за I_3 .

$$2 \Omega \cdot (-2 A) + 9 \Omega \cdot I_2 = 41 V$$

$$-4 V + 9 \Omega \cdot I_2 = 41 V$$

$$9 \Omega \cdot I_2 = 41 V + 4 V$$

$$9 \Omega \cdot I_2 = 45 V$$

$$I_2 = \frac{45 V}{9 \Omega}$$

$$I_2 = 5 A$$

Струја I_1 се одређује из прве написане једначине:

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$

$$I_1 = 5 A + (-2 A)$$

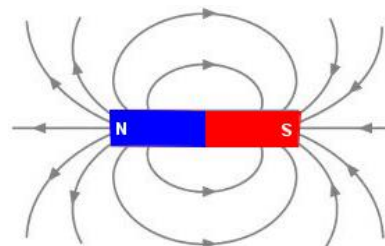
$$I_1 = 3 A$$

4. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКА

4.1 Магнетно поље

Магнет је свако тело које има особину да привлачи гвоздене предмете. Појава привлачења се назива магнетизам. Магнети се деле на природне (магнетит) и вештачке (гвожђе, хром, волфрам, кобалт). Сваки магнет има два пола: северни (N) и јужни (S).

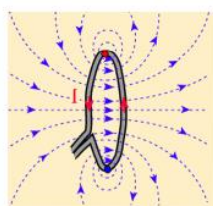
Око сваког магнета постоји магнетно поље. Оно је резултат дајства магнетних сила. Магнетно поље се приказује помоћу магнетних линија сила, слика 4.1. Свака линија пролази кроз магнет и затворена је. Магнетно поље је вртложно, тј. линије немају ни почетак ни крај. Усмерене су од северног ка јужном полу. Правац се поклапа са правцем тангенте на линију у свакој тачки.



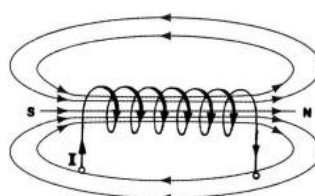
Слика 4.1 Уз магнетно поље

4.2 Магнетно поље струјних проводника

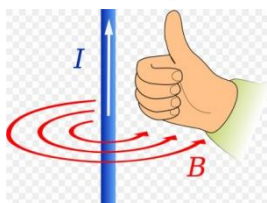
Око наелектрисања која се крећу кроз проводник постоји магнетно поље. На слици 4.2 су приказана магнетна поља: а) праволинијског проводника, б) кружног проводника (кружна контура), в) соленоида (калема) и г) торуса.



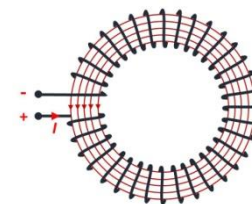
(а)



(б)



(в)



(г)

Слика 4.2 Уз магнетно поље струјних проводника

4.3 Магнетна индукција

Магнетна индукција \vec{B} је векторска величина. Интензитет B се одређује према формулама које зависе од геометрије проводника. Правац је тангента на кружницу а смер се одређују правилном десне руке (завојнице). Јединица за магнетну индукцију је тесла [T].

1. праволинијски проводник, Био-Саваров закон

Интензитет магнетне индукције у тачки A која се налази на нормалном растојању r_A од проводника је:

$$B_A = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot I}{2\pi r_A}, \quad (4.1)$$

где је

$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{Tm}{A}$, магнетна пермеабилност у вакууму, јединице су и $\left[\frac{N}{A^2}\right]$, $\left[\frac{H}{m}\right]$,

μ_r -релативна магнетна пермеабилност средине, нема јединицу (неименован број).

Важи и:

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r, \quad (4.2)$$

μ је магнетна пермеабилност средине, јединица $\left[\frac{Tm}{A}\right]$, $\left[\frac{N}{A^2}\right]$ или $\left[\frac{H}{m}\right]$.

2. кружна контура

Интензитет магнетне индукције у тачки A која се налази у центру кружне контуре полупречника r_A је:

$$B_A = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot I}{2r_A}, \quad (4.3)$$

3. соленоид (калем)

Интензитет магнетне индукције у калему је:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N \cdot I}{l}, \quad (4.4)$$

где је:

N број навојака калема

l дужина навоја калема

4. торус,

Интензитет магнетне индукције у торусу је:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N \cdot I}{l_{sr}}, \text{ или} \quad (4.5)$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r_{sr}}, \quad (4.6)$$

$$r_{sr} = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (4.7)$$

где је:

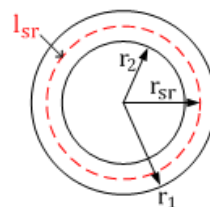
N број навојака торуса

l_{sr} дужина средње линије торуса, слика 4.3

r_{sr} полупречник средње линије торуса

r_1 спољашњи полупречник торуса

r_2 унутрашњи полупречник торуса



Слика 4.3 Уз торус

4.4 Јачина магнетног поља

Јачина магнетног поља \vec{H} је векторска величина. Јединица за јачину магнетног поља је $\frac{A}{m}$.

$$H = \frac{B}{\mu} \quad (4.8)$$

$$H = \frac{B}{\mu_0 \cdot \mu_r} \quad (4.9)$$

Правац и смер се одређују исто као код магнетне индукције.

Бројна вредност (заменом израза 4.1, 4.3, 4.4, 4.5 и 4.6 у једначину 4.9 добијају се следећи изрази):

1. праволинијски проводник:

$$H_A = \frac{I}{2\pi r_A}, \quad (4.10)$$

2. кружна контура:

$$H_A = \frac{I}{2r_A}, \quad (4.11)$$

3. соленоид (калем)

$$H = \frac{N \cdot I}{l}, \quad (4.12)$$

4. торус,

$$H = \frac{N \cdot I}{l_{sr}}, \text{ или} \quad (4.13)$$

$$H = \frac{N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r_{sr}}, \quad (4.14)$$

Примери

1. Подаци: праволинијски проводник, $I = 16 \text{ mA}$, $r_A = 2 \text{ cm}$, $\mu_r = 7$. Одредити магнетну индукцију и јачину магнетног поља у тачки A .

$$B_A = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot I}{2\pi r_A} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \cdot 7 \cdot 16 \cdot 10^{-3} \text{ A}}{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 112 \cdot 10^{-8} \text{ T}$$

$$H_A = \frac{I}{2\pi r_A} = \frac{16 \cdot 10^{-3} \text{ A}}{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = \frac{4}{\pi} 10^{-1} \frac{\text{A}}{\text{m}} = 1,27 \cdot 10^{-1} \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

или на други начин:

$$H_A = \frac{B_A}{\mu_0 \cdot \mu_r} = \frac{112 \cdot 10^{-8} \text{ T}}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \cdot 7} = \frac{4}{\pi} 10^{-1} \frac{\text{A}}{\text{m}} = 1,27 \cdot 10^{-1} \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

2. Подаци: кружна контура, $I = 80 \mu\text{A}$, $r_A = 6 \text{ mm}$, $\mu_r = 9$. Одредити јачину магнетног поља и магнетну индукцију у тачки A .

$$H_A = \frac{I}{2 \cdot r_A} = \frac{80 \cdot 10^{-6} \text{ A}}{2 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 6,67 \cdot 10^{-3} \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$B_A = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot I}{2r_A} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \cdot 9 \cdot 80 \cdot 10^{-6} \text{ A}}{2 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 240\pi \cdot 10^{-10} \text{ T} = 753,6 \cdot 10^{-10} \text{ T},$$

или на други начин:

$$B_A = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H_A = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \cdot 9 \cdot 6,67 \cdot 10^{-3} \frac{\text{A}}{\text{m}} = 753,9 \cdot 10^{-10} \text{ T}$$

3. Подаци: калем, $I = 6 \text{ mA}$, $l = 30 \text{ cm}$, $N = 3000$, $\mu_r = 50$. Одредити јачину магнетног поља и магнетну индукцију у калему.

$$H = \frac{N \cdot I}{l} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \text{ A}}{30 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 0,6 \cdot 10^2 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N \cdot I}{l} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \cdot 50 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \text{ A}}{30 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 120\pi \cdot 10^{-5} \text{ T},$$

или на други начин:

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \cdot 50 \cdot 0,6 \cdot 10^2 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 120\pi \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

4. Подаци: торус, $I = 12 \text{ mA}$, $r_1 = 24 \text{ cm}$, $r_2 = 16 \text{ cm}$, $N = 500$, $\mu_r = 80$. Одредити јачину магнетног поља и магнетну индукцију у торусу.

$$r_{sr} = \frac{r_1 + r_2}{2} = 20 \text{ cm},$$

$$l_{sr} = 2 \cdot \pi \cdot r_{sr} = 40\pi \text{ cm},$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N \cdot I}{l_{sr}} = 480 \cdot 10^{-6} \text{ T},$$

$$H = \frac{N \cdot I}{l_{sr}} = 0,477 \cdot 10^1 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

или на други начин:

$$H = \frac{B}{\mu_0 \cdot \mu_r} = 0,477 \cdot 10^1 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

4.5 Амперов закон

Ако магнетно поље настаје од више проводника таквих да кроз сваки протиче струја и ако је l дужина затворене линије која их обухвата тада је:

$$\vec{H} \cdot \vec{l} = \sum I \quad (4.15)$$

Пример

1. Доказати израз за јачину магнетног поља торуса (4.14) користећи Амперов закон.

$$\vec{H} \cdot \vec{l} = \sum I$$

$$H \cdot l = NI$$

$$H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_{sr} = NI$$

$$H = \frac{N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r_{sr}}$$

4.6 Магнетно поље у присуству супстанце

Однос магнетне индукције у присуству супстанце B и магнетне индукције у вакууму B_0 се назива релативна магнетна пермеабилност μ_r .

$$\mu_r = \frac{B}{B_0} \quad (4.16)$$

Према вредности релативне магнетне пермеабилности сви материјали се деле у 3 групе:

1. дијамагнетици, $\mu_r < 1$ (бизмут, сребро, олово, бакар, вода; око 0.99)
2. парамагнетици, $\mu_r > 1$ (платина, алуминијум, кисеоник, ваздух; око 1.00027)
3. феромагнетици, $\mu_r \gg 1$ (гвожђе, кобалт, никал и њихове легуре; од 70 – 100000)

Земљина магнетна индукција је око $50 \mu\text{T}$, индукција у околини енергетских проводника са струјом је око 1 mT , индукција у гвожђу може достићи око 2 T , а индукција јаких суперпроводних магнета је реда величине 10 T .

4.7 Магнетна својства материјала

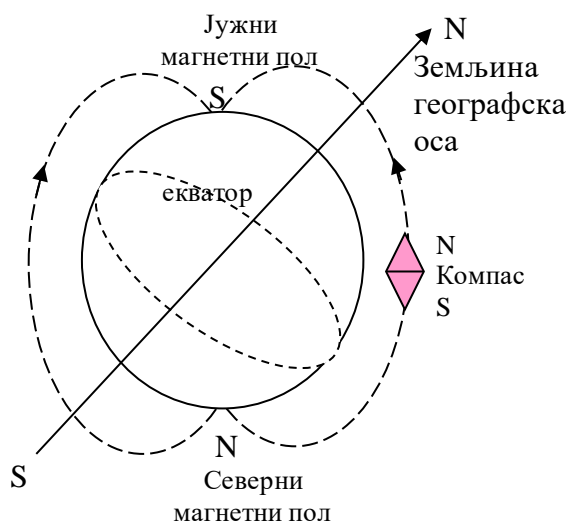
Електрони се крећу двојачко: око своје осе и око језгра. Свако наелектрисање које се креће представља струју а свака струја ствара магнетно поље. Сваки атом је систем струјних контура које се називају Амперове струје.

Ако се материјал не налази у страном магнетном пољу тада је поље Амперових струја приметно само у околини атома.

Понашање у страном магнетном пољу:

1. Дијамагнетици – не поседују сопствени магнетни момент. Ако се унесу у страном магнетно поље долази до промене кретања електрона, јављају се струје на нивоу атома које стварају ово поље супротног смера. Ово поље је малог интензитета па је резултантно поље мало мање од страног поља.
2. Парамагнетици – атоми поседују резултантни магнетни момент. Ако нема страног поља елементарна магнетна поља су у свим правцима. У страном пољу настаје оријентација у смеру страног поља и укупно поље се незнатно повећава.
3. Феромагнетици – овде постоје групе атома или молекула са истом оријентацијом магнетних момената. Називају се домени. Када се материјал унесе у страном поље настаје оријентација домена у смеру поља. Укупно поље се многоструко повећава.

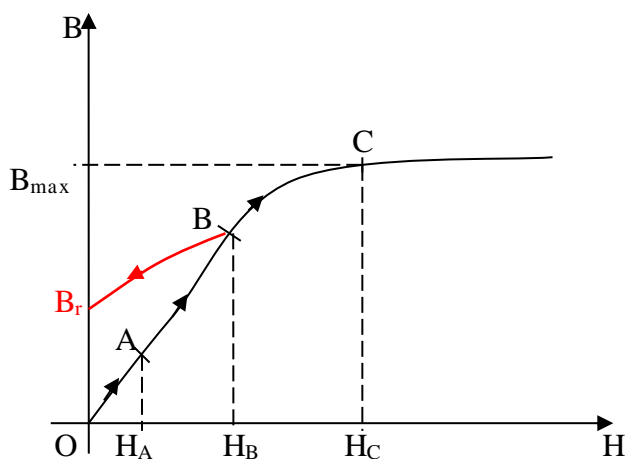
Код дијамагнетика и парамагнетика μ_r је константно, а код феромагнетика зависи од јачине магнетног поља и од температуре. При високим температурама нарушава се оријентација магнетних момената и феромагнетни материјали губе магнетна својства. Критична температура се назива Киријева температура, и за гвожђе она износи 770, кобалт 1145 и никл 360 степени.



Слика 4.4 Магнетно поље Земље

4.8 Магнетисање феромагнетних материјала

Феромагнетни материјал, који раније није био намагнетисан, изложи се дејству магнетног поља чија се вредност повећава од 0 до H , слика 4.5.



Слика 4.5 Крива прве магнетизације

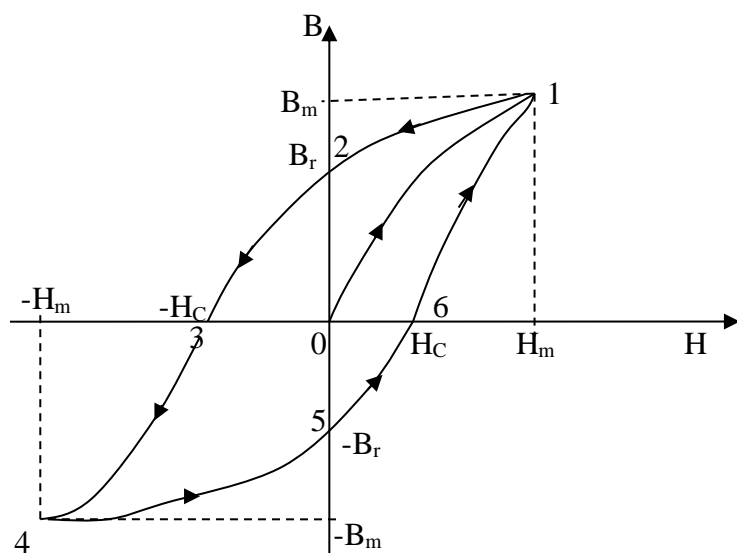
У области OA поље расте од 0 до H_A , оријентису се само домени чији су моменти приближни по правцу и смеру пољу H . B и H су скоро пропорционални, μ_r је скоро константно. Ако се у тачки A укине поље индукција пада на 0.

У области AB расте H , повећава се број оријентисаних домена. Ако у тачки B почнемо да смањујемо поље ка 0, B ће спорије опадати од H , па када H постане 0, B ће имати вредност B_r , то је заостали, реманентни магнетизам.

Област BC води у засићење, где су сви домени оријентисани. Ако се поље повећава преко вредности H_C индукција више не може да се

повећава.

Динамичка крива магнетисања се добија када се феромагнетни материјал изложи дејству променљивог магнетног поља, слика 4.6.



Слика 4.6 Хистерезисна петља

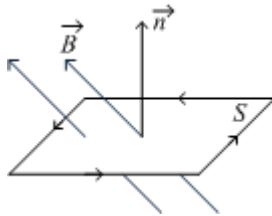
- 0–1: крива прве магнетизације
- 1-2: H опада до 0, а B до реманентне индукције
- 2-3: јачина поља расте у супротном смеру, индукција опада до 0. H_c је коерцитивно поље, тј поље супротног смера потребно за поништавање заостале индукције.
- 3-4: засићење
- 4-5: понавља се даље исто

У току магнетисања индукција стално заостаје за пољем и то се зове магнетни хистерезис. Динамичка крива се још назива и хистерезисна петља

У току магнетисања електрична енергија се претвара у топлотну. Површина хистерезисне петље је сразмерна губицима енергије која се трансформише у топлотну.

Меки магнетни материјали имају ужу хистерезисну петљу. Ови материјали се користе за израду језгра трансформатора, електромагнете.... Тврди магнетни материјали имају широку хистерезисну петљу и користе се за израду сталних магнета.

4.9 Флукс вектора магнетне индукције



Слика 4.7 Флукс

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) \quad (4.17)$$

Флукс је скаларна величина. Јединица је $[Tm^2]$ односно вебер $[Wb]$.

Код отворених површина прво се изабере смер обиласка површине, па се на основу тога одреди смер нормале (десна рука).

Закон о конзервацији магнетног флука: ФЛУКС КРОЗ ЗАТВОРЕНУ ПОВРШИНУ ЈЕДНАК ЈЕ НУЛИ.

Пример

- У хомогеном магнетном пољу индукције $B = 12 \mu T$ се налази кружна контура површине $S = 4 cm^2$, чија нормала заклапа угао од 67° са вектором магнетне индукције. Израчунати флукс кроз контуру.

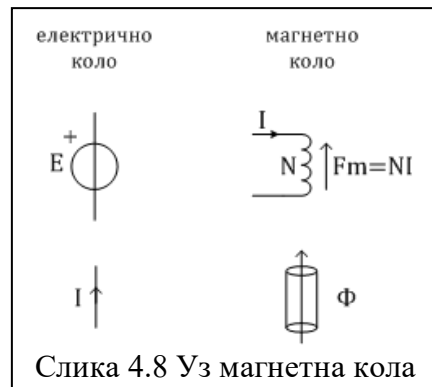
$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) = 12 \cdot 10^{-6} T \cdot 4 \cdot 10^{-4} m^2 \cdot \cos 67^\circ = 18,75 \cdot 10^{-6} Wb$$

4.10 Магнетна кола. Кап-Хопкинсонов закон

Магнетно коло је систем у коме се флукс креће одређеним путем. Поређење са електричним колом, слика 4.8:

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S} \quad R_m = \frac{l}{\mu \cdot S}, \quad \text{где је } R_m \text{ магнетна отпорност, } \left[\frac{Anavojak}{Wb} \right]$$

$$I = \frac{U}{R} \quad \Phi = \frac{F_m}{R_m} = \frac{NI}{R_m} = \lambda \cdot F_m, \quad \text{где је } \lambda \text{ магнетна проводност } \left[\frac{Wb}{Anavojak} \right]$$



Слика 4.8 Уз магнетна кола

Пример

- Подаци: торус, $I = 12 mA$, $r_1 = 24 cm$, $r_2 = 16 cm$, $N = 500$, $\mu_r = 80$, $S = 4 cm^2$.
Одредити магнетну отпорност, магнетни напон и флукс у торусу.

$$R_m = \frac{l}{\mu \cdot S} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{sr}}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot S} = 31,25 \cdot 10^6 \frac{Anavojaka}{Wb}$$

$$F_m = N \cdot I = 6 Anavojaka$$

$$\Phi = \frac{F_m}{R_m} = 192 nWb$$

4.11 Проводник са струјом у страном магнетном пољу – електромагнетна сила

Када се проводник са струјом нађе у страном магнетном пољу на њега делује магнетна сила – Амперова сила. Ово је векторска величина и представља векторски производ:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B} \quad (4.18)$$

Интензитет ове силе износи:

$$F = B \cdot I \cdot l \cdot \sin(\vec{B}, \vec{l}) \quad (4.19)$$

Сила има правац нормале на површину на којој леже вектори \vec{B} и \vec{l} , а смер са одређује правилом 3 прста ДЕСНЕ руке (палац-индукција, кажипрст-сила, средњи прст-струја).

Из овог обрасца се дефинише јединица тесла: хомогено магнетно поље има индукцију $1 T$ ако делује на нормалан проводник дужине $1 m$ силом од $1 N$ када кроз проводник протиче струја од $1 A$.

Пример

- У хомогеном магнетном пољу индукције $B = 8 mT$ се налази праволинијски проводник дужине $l = 60 cm$, кроз који протиче струја јачине $I = 20 \mu A$. Проводник и поље заклапају угао од 27° . Одредити интензитет силе којом поље делује на проводник.

$$F = B \cdot I \cdot l \cdot \sin(\vec{B}, \vec{l}) = 8 \cdot 10^{-3} T \cdot 20 \cdot 10^{-6} A \cdot 60 \cdot 10^{-2} m \cdot \sin 27^\circ$$

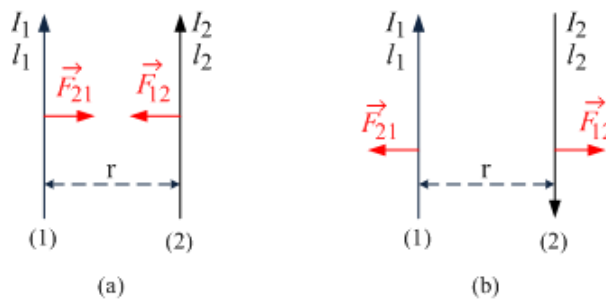
$$F = 4358,3 \cdot 10^{-11} N$$

4.12 Узајамно деловање проводника са струјом – електродинамичка сила

Два паралелна струјна проводника узајамно делују један на други, слика 4.9. Ако су струје истог смера сила је привлачна (слика 4.9а), а ако су различитог смера одбојна (слика 4.9б). Интензитет ових сила износи:

$$F_{12} = B_1 I_2 l_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I_1 I_2 l_2}{2\pi r} \quad (4.20)$$

$$F_{21} = B_2 I_1 l_1 = \frac{\mu_0 \mu_r I_2 I_1 l_1}{2\pi r} \quad (4.21)$$



Слика 4.9 Уз електродинамичку силу

Из ових једначина се дефинише јединица ампер: један ампер је она струја која протичући кроз 2 дугачка паралелна проводника која се налазе на растојању од једног метра производи силу по јединици дужине од $2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}$.

Пример

1. Кроз два дугачка паралелна проводника који се налазе у ваздуху протичу струје $I_1 = 5 \text{ mA}$ и $I_2 = 8 \text{ mA}$ у супротним смеровима. Проводници су дугачки по $l = 60 \text{ cm}$ и налазе се на растојању од $r = 20 \text{ cm}$. Одредити интензитет силе којом први проводник делује на други.

$$F_{12} = \frac{\mu_0 \mu_r I_1 I_2 l_2}{2\pi r} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot 8 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot 60 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 10^{-2} \text{ m}}$$

$$F_{12} = 240 \cdot 10^{-13} \text{ N}$$

4.13 Електромагнетна индукција

Фарадејев закон: Индукована електромоторна сила e бројно је једнака негативној промени флукса у јединици времена. Јединица је $[V]$. Због Ленцовог правила индукована електромоторна сила има такав смер да ствара струју која се својим пољем супротставља промени флукса која ју је и изазвала.

$$e = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad (4.21)$$

$$e = - \frac{\Phi_{\text{krajnje}} - \Phi_{\text{početno}}}{t_{\text{krajnje}} - t_{\text{početno}}} \quad (4.22)$$

Како је $\Phi = B \cdot S \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) = B \cdot S \cdot \cos(\alpha)$, промена флукса може да настане услед:

- 1) Промене индукције:
 $\Delta \Phi = \Phi_{kr} - \Phi_{poč} = \Delta B \cdot S = (B_{kr} - B_{poč}) \cdot S$
- 2) Промене површине:
 $\Delta \Phi = \Phi_{kr} - \Phi_{poč} = B \cdot \Delta S = B \cdot (S_{kr} - S_{poč})$
- 3) Промене положаја (угла):
 $\Delta \Phi = \Phi_{kr} - \Phi_{poč} = B \cdot S \cdot \Delta \cos \alpha = B \cdot S \cdot (\cos \alpha_{kr} - \cos \alpha_{poč})$

Пример

1. У хомогеном магнетном пољу индукције $B = 12 \mu T$ се налази кружни рам површине $S = 4 \text{ cm}^2$, чија нормала заклапа угао од 30° са вектором магнетне индукције. У временском интервалу $\Delta t = 5 \text{ ms}$, контура се постави у положај да њена нормала заклапа угао од 60° са вектором магнетне индукције. Израчунати индуковану електромоторну силу у раму.

$$\Phi_{poč} = B \cdot S \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) = 12 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \cos 30^\circ = 41,57 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}$$

$$\Phi_{kr} = B \cdot S \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) = 12 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \cos 60^\circ = 24 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}$$

$$e = - \frac{\Phi_{\text{krajnje}} - \Phi_{\text{početno}}}{\Delta t} = -3,51 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

4.14 Индукована електромоторна сила у праволинијском проводнику

Ако постоји релативно кретање између магнетног поља и проводника у проводнику ће се индуовати електромоторна сила. Бројна вредност индуковане електромоторне силе је:

$$e_{ind} = B \cdot l \cdot v \cdot \sin(\vec{B}, \vec{v}) \quad (4.23)$$

Смер се одређује правилом три прста леве руке (палац-индукција, кажипрст-брзина, средњи прст-индукована емс).

Пример


- У хомогеном магнетном пољу индукције $B = 5 \text{ mT}$ се креће проводник дужине 1 m брзином од $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. За то време се у проводнику индукује електромоторна сила од 20 mV . Одредити угао између вектора магнетне индукције и брзине кретања проводника

$$\sin(\vec{B}, \vec{v}) = \frac{e_{ind}}{B \cdot l \cdot v} = 0,4, \{ \sin \alpha = 0,4 \Rightarrow \alpha = \arcsin 0,4 = 23,6^\circ \}$$

4.15 Индуктивност кола

Око сваког проводника са струјом постоји магнетно поље. Флукс који потиче од сопственог магнетног поља се назива сопствени флукс Φ_s . Овај флукс је сразмеран сопственој струји. Коефицијент сразмерности се назива индуктивност кола L . Индуктивност кола зависи од врсте средине, облика и димензија кола. Јединица је хенри $[H]$.

$$L = \frac{\Phi_s}{I} \quad (4.24)$$

Шематска ознака индуктивности у електричним колима је: 

Индуктивност калема:

магнетна индукција калема је $B = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N \cdot I}{l}$,

сопствени магнетни флукс калема по једном навојку: $\Phi_s^{(1)} = B \cdot S = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N \cdot I \cdot S}{l}$,

укупан сопствени флукс калема: $\Phi_s = N \cdot \Phi_s^{(1)} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N^2 \cdot I \cdot S}{l}$,

индуктивност калема: $L = \frac{\Phi_s}{I} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N^2 \cdot S}{l} \quad (4.25)$

Из последње једначине се изводи још једна јединица за μ_0 : $\frac{H}{m}$

Индуктивност торуса:

Аналогним извођењем долази се до израза:

$$L = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N^2 \cdot S}{l_{sr}} \quad (4.26)$$

Пример

- На торус кружног попречног пресека, чији унутрашњи и спољашњи полупречник износе 11 cm и 9 cm равномерно је намотано $N = 2000$ навојака. Кроз навојке

протиче струја од $I = 100 \text{ mA}$. Релативна магнетна пермеабилност износи 1000.

Одредити флуks по једном навојку, сопствени флуks и индуктивност торуca

$$\Phi_s^{(1)} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N \cdot I \cdot S}{l_{sr}} = 0,1256 \text{ mWb}$$

$$\Phi_s = N \cdot \Phi_s^{(1)} = 0,2512 \text{ Wb}$$

$$L = \frac{\Phi_s}{I} = 2,512 \text{ H}$$

4.16 Међусобна индуктивност

Посматра се коло 1, слика 4.10. Кроз коло 1 пролазе:

-индукција кола 1, B_1 , која ствара сопствени флуks:

$$\Phi_{1s} = N_1 \cdot \Phi_{1s}^{(1)} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N_1^2 \cdot I_1 \cdot S_1}{l_1}, \text{ или}$$

$$\Phi_{1s} = L_1 \cdot I_1, \text{ где је}$$

$$L_1 = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N_1^2 \cdot S_1}{l_1}$$

-индукција кола 2, B_2 , која ствара међусобни флуks Φ_{12} (потиче од индукције B_2 пролази кроз прво коло чији су подаци N_1, S_1 и l_1):

$$\Phi_{12} = N_1 \cdot S_1 \cdot B_2 = N_1 \cdot S_1 \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N_2 \cdot I_2}{l_2}, \text{ или}$$

$$\Phi_{12} = L_{12} \cdot I_2, \text{ где је}$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot S_1}{l_2}$$

Укупан флуks кроз коло 1 је

$$\Phi_{1u} = \Phi_{1s} + \Phi_{12}, \text{ или}$$

$$\Phi_{1u} = L_1 \cdot I_1 + L_{12} \cdot I_2$$

L_{12} је међусобна индуктивност и показује утицај струје другог кола на флуks у првом колу. Међусобна индуктивност зависи од средине, облика оба кола, њиховог међусобног положаја и растојања.

На сличан начин се долази до израза за укупан флуks кроз коло 2

$$\Phi_{2u} = \Phi_{2s} + \Phi_{21}, \text{ или}$$

$$\Phi_{2u} = L_2 \cdot I_2 + L_{21} \cdot I_1, \text{ где је}$$

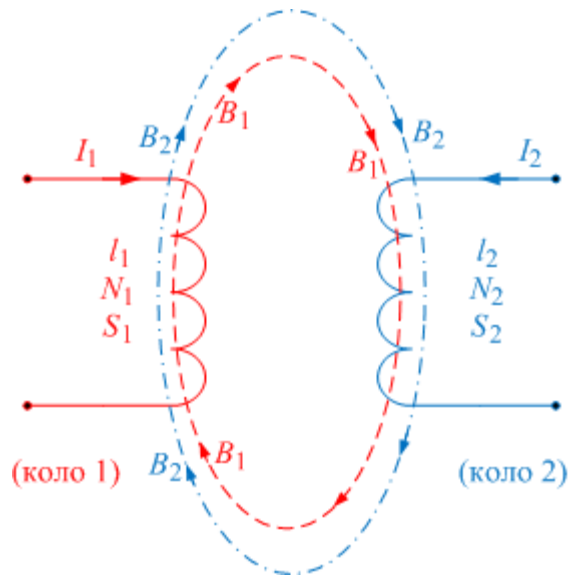
$$L_2 = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N_2^2 \cdot S_2}{l_2} \text{ и}$$

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot S_2}{l_1}$$

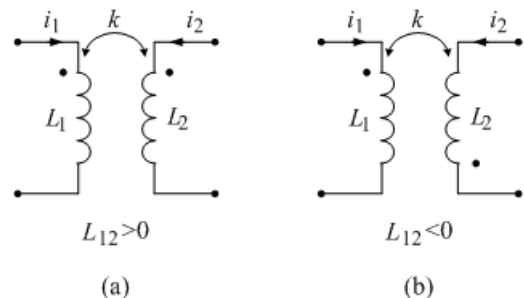
Уколико су $l_1 = l_2 = l$ и $S_1 = S_2 = S$, тада је:

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot S}{l}$$

Струјна кола која имају заједничко магнетно коло називају се индуктивно спрегнута.



Слика 4.10 Уз међусобну индуктивност



Слика 4.11 Уз међусобну индуктивност

Квадрирањем се добија следећи израз:

$$L_{12}^2 = L_{21}^2 = L_1 \cdot L_2, \text{ односно}$$

$$L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

Међутим, због магнетних расипања важи:

$$L_{12} = L_{21} = M = \pm k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}, \text{ где је}$$

k је коефицијент спреге, неименован је број, $0 < k \leq 1$ и зависи од растојања и положаја кола 1 и кола 2.

Да би еквивалентна шема давала потпуну информацију о калемовима, морамо на основу ње моћи да одредимо знак међусобне индуктивности. То се постиже постављањем тачака, по један крај сваког калема се обележи тачком. Ако обе струје улазе (или обе излазе) у крајеве обележене тачкама, онда је међусобна индуктивност позитивна, $L_{12} = L_{21} = M = +k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}$, слика 4.11a. Ако једна струја улази а друга излази из краја калема обележеног тачком, онда је међусобна индуктивност негативна, $L_{12} = L_{21} = M = -k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}$, слика 4.11b.

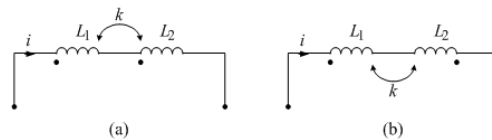
Одређивање еквивалентне индуктивности:

слика 4.12a

$$L_{12} = L_1 + L_2 + 2 \cdot L_{12}$$

слика 4.12b

$$L_{12} = L_1 + L_2 - 2 \cdot L_{12}$$



Слика 4.12 Уз еквивалентну индуктивност

Пример

1. Два соленоида се налазе у ваздуху у таквом положају да им је коефицијент спреге 0,2. Соленоиди имају исту дужину од $l_1 = l_2 = 40 \text{ cm}$ и исти број навојака $N_1 = N_2 = 1000$. Полупречници навојака су $R_1 = 3 \text{ cm}$ и $R_2 = 1,5 \text{ cm}$. Одредити међусобну индуктивност

$$L_1 = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N_1^2 \cdot S_1}{l_1} = 8,88 \text{ mH}$$

$$L_2 = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N_2^2 \cdot S_2}{l_2} = 2,22 \text{ mH}$$

$$M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} = 0,888 \text{ mH}$$

4.17 Самоиндукција

Ако је у струјном колу успостављена струја која је променљива у времену $i(t)$ онда је и сопствени флуks променљив у времену:

$$\Phi_s(t) = L \cdot i(t)$$

Како постоји промена флуksа у времену у колу се индукује електромоторна сила самоиндукције:

$$e_L = -L \frac{\Delta i(t)}{\Delta t} = -L \frac{\Delta i(t)}{\Delta t} \quad (4.27)$$

Пример

- У соленоиду индуктивности $L = 1 \text{ mH}$, струја се равномерно промени од $I_{\text{пoc}} = 2 \text{ A}$ до $I_{\text{кр}} = 10 \text{ A}$, за време од $t_{\text{пoc}} = 0$ до $t_{\text{кр}} = 5 \text{ ms}$. Одредити индуковану електромоторну силу самоиндукције

$$e_L = -L \frac{\Delta i(t)}{\Delta t} = -1 \cdot 10^{-3} \text{ H} \cdot \frac{10 \text{ A} - 2 \text{ A}}{5 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = -1,6 \text{ V}$$

4.18 Међусобна (узајамна) индукција

Ако су два кола индуктивно спрегнута, услед промене струје у првом колу индукује се електромоторна сила у другом.

$$\Phi_{21}(t) = M \cdot i_1(t) \Rightarrow$$

$$e_{M2} = -M \frac{\Delta i_1(t)}{\Delta t} \quad (4.28)$$

Слично, услед промене струје у другом колу индукује се електромоторна сила у првом.

$$e_{M1} = -M \frac{\Delta i_2(t)}{\Delta t}$$

Пример

- Два калема са ваздушним језгром су намотана један преко другог, тако да им је коефицијент спреге позитиван. Први калем има индуктивност $L_1 = 500 \text{ mH}$ и кроз њега протиче струја $I_{\text{пoc}} = 10 \text{ A}$, која се отварањем прекидача равномерно смањи на вредност $I_{\text{кр}} = 0$, за време од $\Delta t = 1 \text{ ms}$. Други калем има индуктивност $L_2 = 700 \text{ mH}$ и отпорност $R_2 = 200 \Omega$. Одредити индуковану електромоторну силу самоиндукције у првом калему, електромоторну силу међусобне индукције у другом калему и индуковану струју међусобне индукције која за то време протиче кроз други калем

$$M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} = 590 \text{ mH}$$

$$e_{L1} = -L_1 \frac{\Delta i_1(t)}{\Delta t} = 5 \text{ kV}$$

$$e_{M2} = -M \frac{\Delta i_1(t)}{\Delta t} = 6 \text{ kV}$$

$$i_2 = \frac{e_{M2}}{R_2} = 30 \text{ A}$$

4.19 Енергија магнетног поља

При успостављању струје калема, електрична енергија из извора се акумулира у облику магнетне енергије калема. При укидању струје калема магнетна енергија се из магнетног поља враћа у електрично коло. Магнетна енергија износи:

$$W_m = \frac{\Phi I}{2} = \frac{L \cdot I^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L} \quad (4.29)$$

Пример

1. Кроз калем индуктивности $L = 6 \text{ mH}$ протиче струја од $I = 4 \text{ mA}$. Израчунати магнетну енергију акумулирану у калему

$$W_m = \frac{L \cdot I^2}{2} = 48 \text{ mJ}$$

4.20 Трансформатори

Трансформатори су уређаји који се састоје од феромагнетног језгра на које су намотана два калема. Калемови су спрегнути, и спрега је јака $k \approx 1$.

Трансформатори се у енергетици употребљавају за промену напона при преносу енергије далеководима.

Савршен трансформатор је трансформатор код кога нема магнетног радипања, односно $k = 1$.

Трансформатор се састоји од магнетног кола (феромагнетног језгра) и електричног кола (2 намотаја: примара са N_1 навојака и секундар са N_2 навојака).

Преносни однос трансформатора је:

$$m = \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

4.21 Вртложне (вихорне) струје или Фукоове струје

Индуковане струје се јављају и у масивним телима, када у њима постоји индуковано електрично поље. Ове струје стварају Џулове губитке. Такође, у језгрима трансформатора доводе до појаве магнетног површинског (скин) ефекта. Индуковане струје стварају своју магнетну индукцију која тежи да поништи промене магнетне индукције примарних извора (струја у намотајима). Резултантна магнетна индукција у средини је зато слабија него уз површину.